

경제학적 관점으로 분석하는

헝가리안 알고리즘

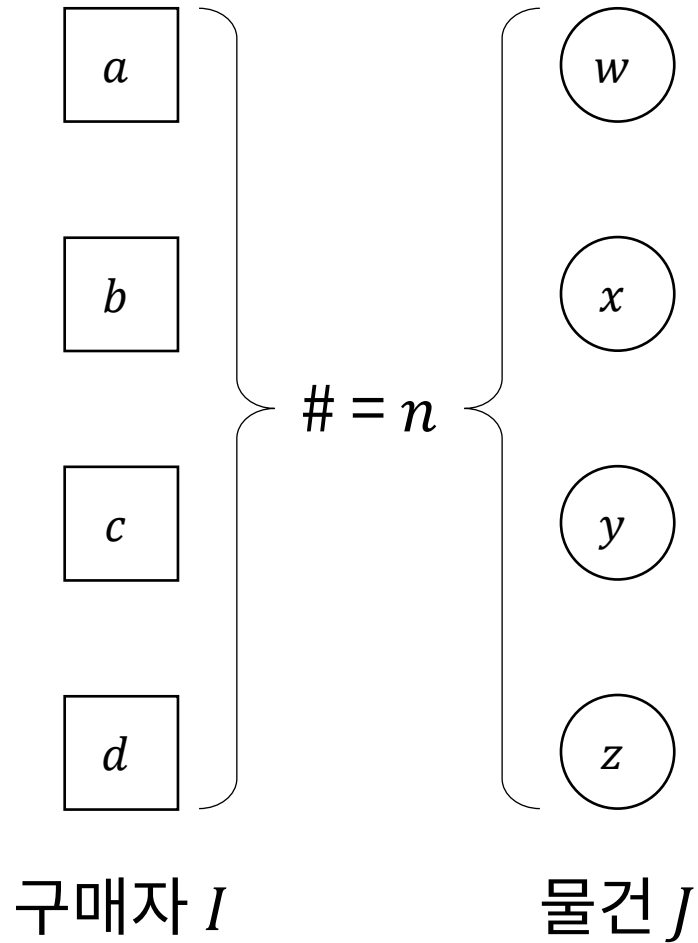
신용호 (연세대학교)

연세 이론 컴퓨터과학 학생 모임 주니어 세미나
2023. 3. 27.



연세대학교 컴퓨터과학과
YONSEI UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

할당 문제 Assignment problem



$I \backslash J$	w	x	y	z	
a					
b					
c					
d					

할당 문제 Assignment problem

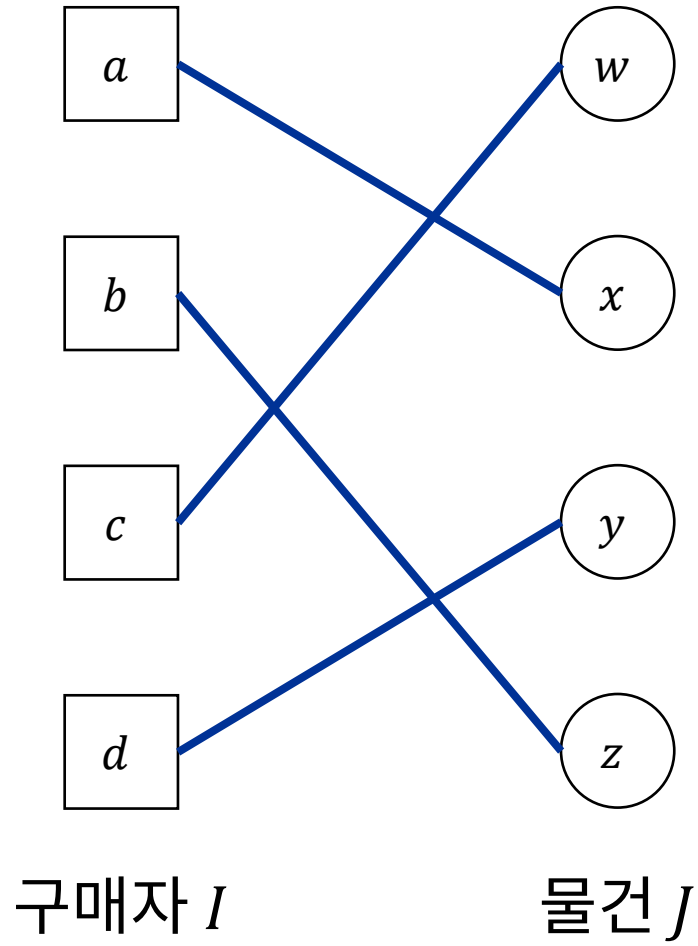


구매자 I

물건 J

$I \backslash J$	w	x	y	z	
a					
b					
c					
d					

할당 문제 Assignment problem



$I \backslash J$	w	x	y	z	
a					
b					
c					
d					

할당 문제 Assignment problem

a

w

b

x

c

y

d

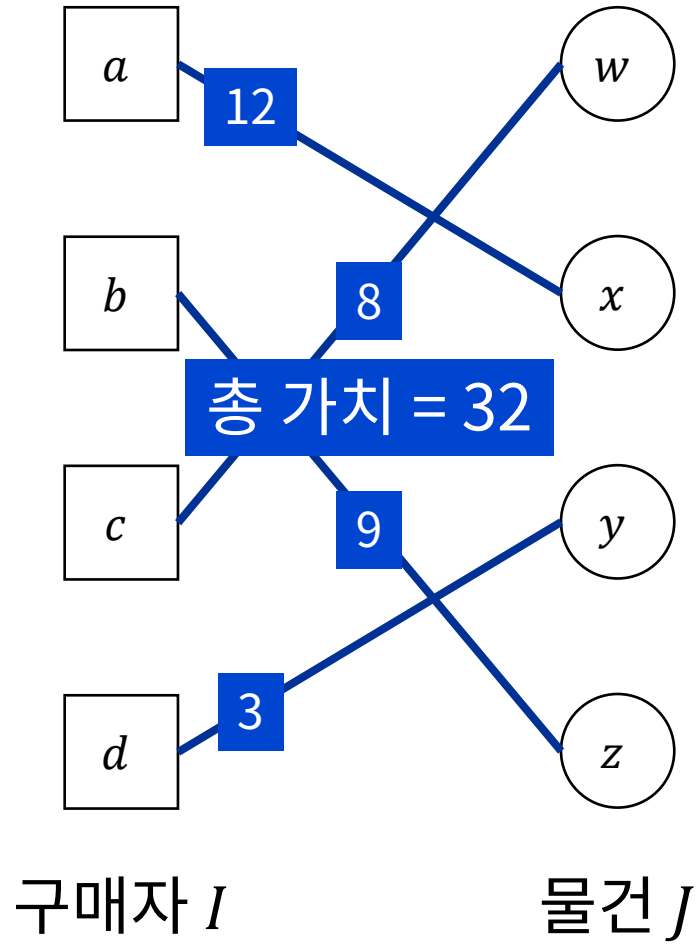
z

구매자 I

물건 J

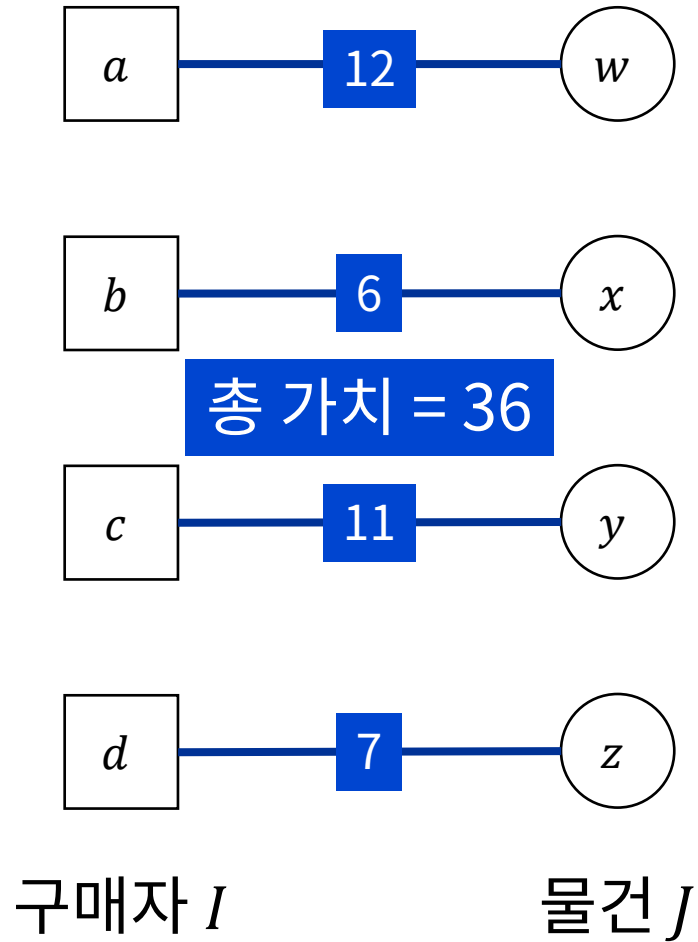
$I \backslash J$	w	x	y	z	
a	12	12	12	8	
b	5	6	10	9	
c	8	5	11	11	
d	2	3	3	7	

할당 문제 Assignment problem



$I \backslash J$	w	x	y	z	
a	12	12	12	8	
b	5	6	10	9	
c	8	5	11	11	
d	2	3	3	7	

할당 문제 Assignment problem



$I \backslash J$	w	x	y	z	
a	12	12	12	8	
b	5	6	10	9	
c	8	5	11	11	
d	2	3	3	7	

할당 문제 Assignment problem

입력

구매자 I & 물건 J ($|I| = |J| = n$)

각 구매자 $i \in I$ 가 생각하는 물건 $j \in J$ 의 가치 $v_{i,j}$

출력

총 가치가 최대인 구매자-물건 할당 방법, 즉

$$\sum_{i \in I} v_{i, \sigma(i)}$$

가 최대인 일대일 대응 $\sigma: I \rightarrow J$

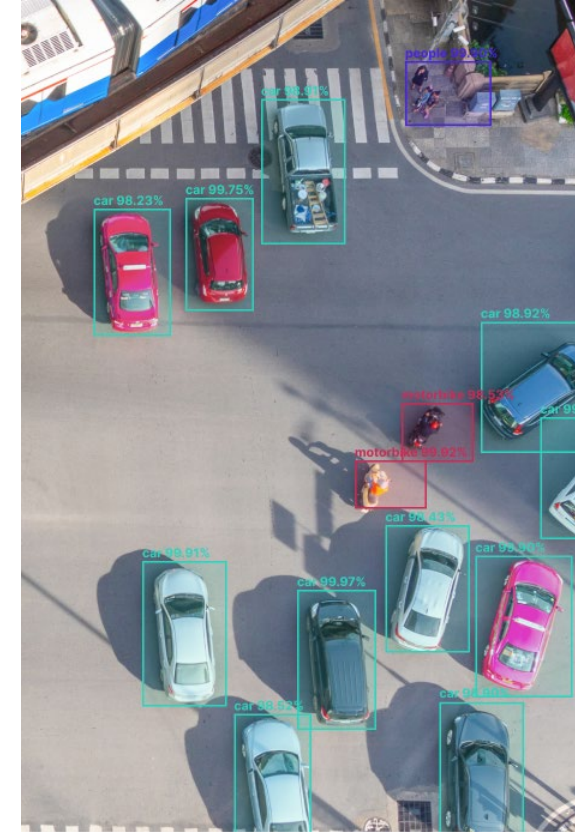
활용



택시 배차

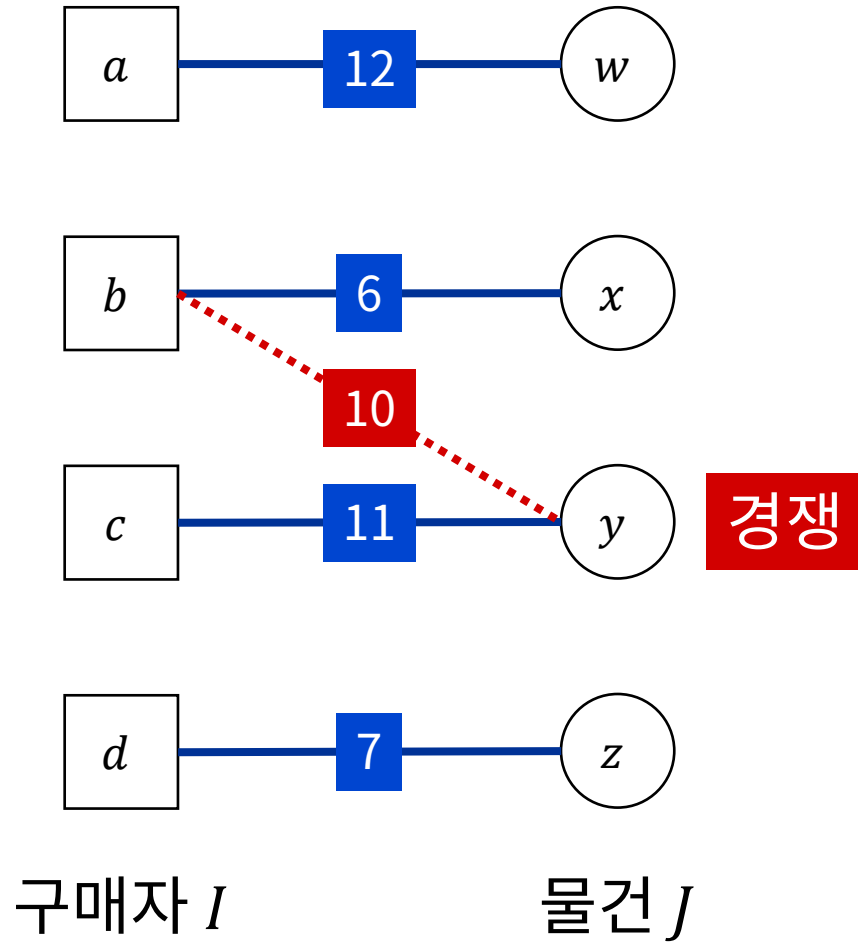


물류 관리



객체 추적

깐깐한 구매자



$I \backslash J$	w	x	y	z	
a	12	12	12	8	
b	5	6	10	9	
c	8	5	11	11	
d	2	3	3	7	

경쟁의 해소

경쟁

많은 구매자가 적은 수의 물건을 원하는 상황

가격

경쟁을 해소하는 경제학적 방법

각 물건 $j \in J$ 마다 p_j 의 가격이 붙었다고 가정

경쟁의 해소

가격

각 물건 $j \in J$ 마다 p_j 의 가격이 붙었다고 가정

효용 Utility

구매자 i 가 물건 j 에 대해 생각하는 이득, 즉, $v_{i,j} - p_j$

균형 Equilibrium

모든 구매자 i 가 자신이 받은 물건 $\sigma(i)$ 를 만족하는 상황, 즉,

$$\forall i \in I \forall j \in J \quad v_{i,\sigma(i)} - p_{\sigma(i)} \geq v_{i,j} - p_j$$

목표

균형을 이루면서 총 가치는 최대가 되는 할당과 가격 찾기

알고리즘 개요

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
 2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
 3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복
- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
 - B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
 - C. 언젠간 균형에 도달하는지
 - D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지



경쟁이 붙은 물건 찾기


$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	12	12	12	8	12
b	5	6	10	9	10
c	8	5	11	11	11
d	2	3	3	7	7
p	0	0	0	0	

경쟁이 붙은 물건 찾기

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

경쟁이 붙은 물건 찾기

J'  

I'	$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
	a	0	0	0	-4	12
	b	-5	-4	0	-1	10
	c	-3	-6	0	0	11
	d	-5	-4	-4	0	7
	p	0	0	0	0	

경쟁이 붙은 물건 찾기

		J'				max u
		w	x	y	z	
I'	I					
	a	0	0	0	-4	12
	b	-5	-4	0	-1	10
	c	-3	-6	0	0	11
	d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0		

만약 $|I'| + |J'| < n$ 이라면?

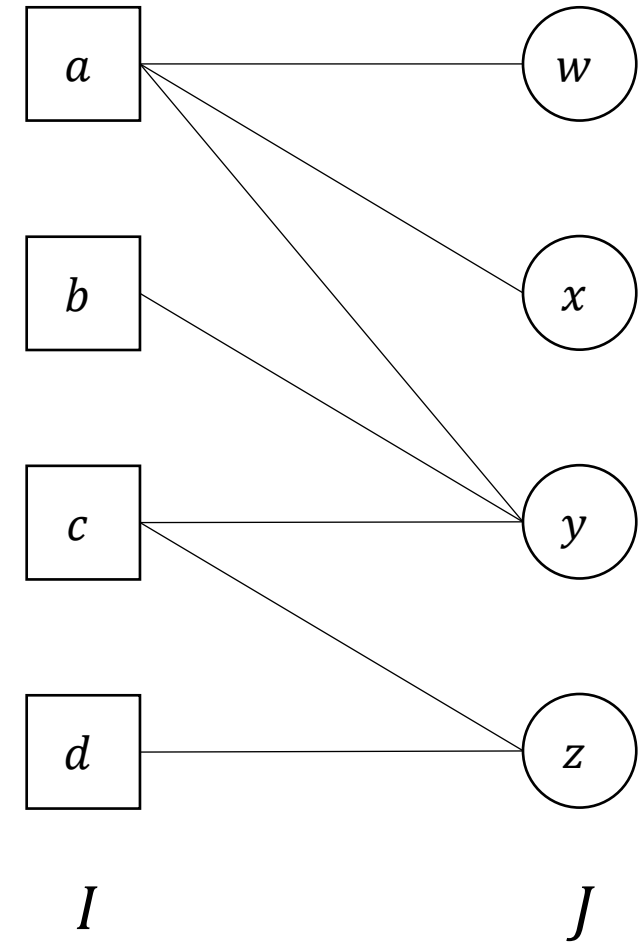
$I \setminus I'$ 은 J' 의 물건만 원함

$|I \setminus I'| = n - |I'| > |J'|$

경쟁 발생!

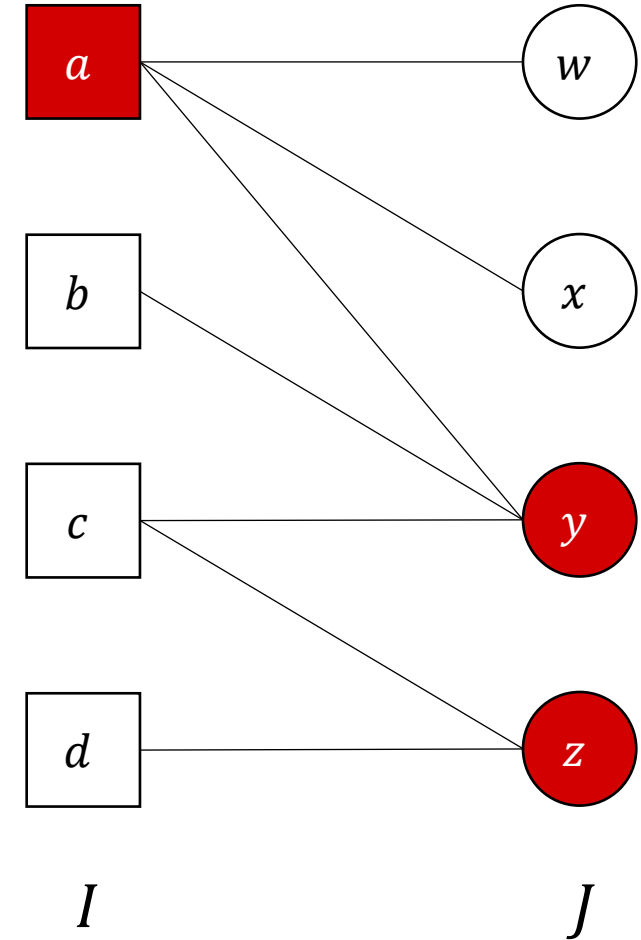
경쟁이 붙은 물건 찾기

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	



경쟁이 붙은 물건 찾기

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	



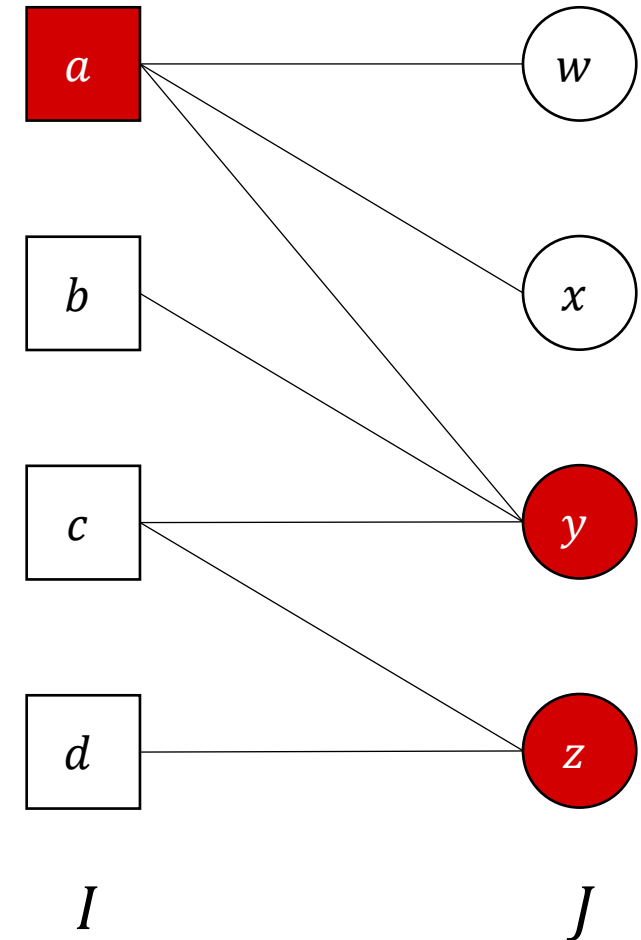
경쟁이 붙은 물건 찾기

정점 덮개 Vertex cover

어떤 그래프에서 모든 간선의 적어도 한 끝점이 속해 있는 정점의 부분 집합

코니그의 정리 König's theorem

이분 그래프에서 최소 정점 덮개의 크기는 최대 이분 매칭의 크기와 동일하다.



해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 퀴니그의 정리
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 쿼니그의 정리
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭**
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지

경쟁 중인 물건 가격 인상

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	12	12	12	8	12
b	5	6	10	9	10
c	8	5	11	11	11
d	2	3	3	7	7
p	0	0	0	0	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

경쟁 중인 물건 가격 인상

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	12	12	12	8	12
b	5	6	10	9	7
c	8	5	11	11	8
d	2	3	3	7	4
p	0	0	3	3	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	-3	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	0	-3	0	0	8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

경쟁 중인 물건 가격 인상

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	-3	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	0	-3	0	0	8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 쿨니그의 정리
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
> $I \setminus I'$ 과 $J \setminus J'$ 의 최소 절댓값
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 쿨니그의 정리
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
> $I \setminus I'$ 과 $J \setminus J'$ 의 최소 절댓값
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지

알고리즘의 종료

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

알고리즘의 종료

알 수 있는 사실 1

노란 행렬의 원소는 항상 0보다 작거나 같다.

알고리즘의 종료

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	-3	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	0	-3	0	0	8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

알고리즘의 종료

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	-3	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	0	-3	0	0	8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

알고리즘의 종료

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	-3	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	0	-3	0	0	8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

알고리즘의 종료

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	0	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	-3	-6	0	0	11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	-3	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	0	-3	0	0	8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

알고리즘의 종료

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	$I', J \setminus J'$		$0 \ I', J'$	-4	12
b	-5	-4	0	-1	10
c	$I \setminus I', J \setminus J'$		$I \setminus I', J'$		11
d	-5	-4	-4	0	7
p	0	0	0	0	

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	$I', J \setminus J'$		$-3 \ I', J'$	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	$I \setminus I', J \setminus J'$		$I \setminus I', J'$		8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

알고리즘의 종료

단계 진입 조건

$$|I'| + |J'| < n$$

단계 마다의 증가량

$$\begin{aligned} & \varepsilon \cdot |I \setminus I'| \cdot |J \setminus J'| - \varepsilon \cdot |I'| \cdot |J'| \\ &= \varepsilon \cdot ((n - |I'|)(n - |J'|) - |I'| |J'|) \\ &= \varepsilon \cdot (n^2 - (|I'| + |J'|)n) \\ &> 0 \end{aligned}$$

알고리즘의 종료

알 수 있는 사실 1.

노란 행렬의 원소는 항상 0보다 작거나 같다.

알 수 있는 사실 2.

단계를 진행할 때마다 노란 행렬의 원소의 합은 커지기만 한다.

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 쿨니그의 정리
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
> $I \setminus I'$ 과 $J \setminus J'$ 의 최소 절댓값
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
> 노란 행렬 원소 합 증가
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 쿨니그의 정리

B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
> $I \setminus I'$ 과 $J \setminus J'$ 의 최소 절댓값

C. 언젠간 균형에 도달하는지
> 노란 행렬 원소 합 증가

D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지

최대 총 가치 할당

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	12	12	12	8	12
b	5	6	10	9	7
c	8	5	11	11	8
d	2	3	3	7	4
p	0	0	3	3	

최대 총 가치 할당

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	0	0	-3	-7	12
b	-2	-1	0	-1	7
c	0	-3	0	0	8
d	-2	-1	-4	0	4
p	0	0	3	3	

최대 총 가치 할당

$I \backslash J$	w	x	y	z	$\max u$
a	12	12	12	8	12
b	5	6	10	9	7
c	8	5	11	11	8
d	2	3	3	7	4
p	0	0	3	3	

총 가치

$$12+10+8+7 \\ = 37$$

최대 효용 + 가격

$$12+7+8+4+3+3+0+0 \\ = 37$$

최대 총 가치 할당

정리 1.

임의의 가격 $p \in \mathbb{R}^J$, 임의의 할당 $\sigma: I \rightarrow J$ 에 대해

$$\sum_{i \in I} \max u_i + \sum_{j \in J} p_j \geq \sum_{i \in I} v_{i, \sigma(i)}$$

[증명]

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \max u_i + \sum_{j \in J} p_j &= \sum_{i \in I} \max_{j \in J} (v_{i,j} - p_j) + \sum_{j \in J} p_j \\ &\geq \sum_{i \in I} (v_{i, \sigma(i)} - p_{\sigma(i)}) + \sum_{j \in J} p_j \\ &= \sum_{i \in I} v_{i, \sigma(i)} \end{aligned}$$

최대 총 가치 할당

정리 2.

어떤 가격 $p \in \mathbb{R}^J$ 에서 균형에 도달한 할당 $\sigma: I \rightarrow J$ 에 대해

$$\sum_{i \in I} \max u_i + \sum_{j \in J} p_j = \sum_{i \in I} v_{i, \sigma(i)}$$

[증명]

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \max u_i + \sum_{j \in J} p_j &= \sum_{i \in I} \max_{j \in J} (v_{i,j} - p_j) + \sum_{j \in J} p_j \\ &= \sum_{i \in I} (v_{i, \sigma(i)} - p_{\sigma(i)}) + \sum_{j \in J} p_j \\ &= \sum_{i \in I} v_{i, \sigma(i)} \end{aligned}$$

해결해야 하는 질문

1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 쿨니그의 정리
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
> $I \setminus I'$ 과 $J \setminus J'$ 의 최소 절댓값
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
> 노란 행렬 원소 합 증가
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지
> 총 가치 = 최대 효용 + 가격

헝가리안 알고리즘

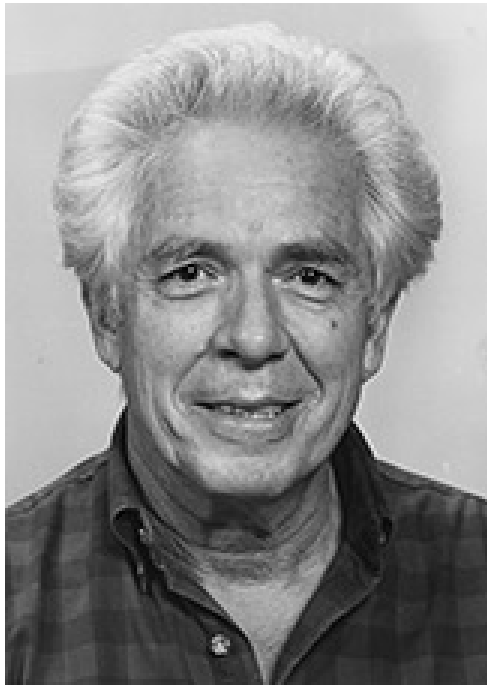
1. 구매자들끼리 경쟁이 붙은 물건 찾기
2. 경쟁이 붙은 물건의 가격 적당히 인상
3. 경쟁이 없을 때까지 위 작업 반복

- A. 경쟁이 붙은 물건을 찾는 방법
> 정점 덮개 & 쿨니그의 정리
- B. 경쟁 중인 물건의 가격 인상폭
> $I \setminus I'$ 과 $J \setminus J'$ 의 최소 절댓값
- C. 언젠간 균형에 도달하는지
> 노란 행렬 원소 합 증가
- D. 균형 도달 시 총 가치가 최대인지
> 총 가치 = 최대 효용 + 가격

헝가리안 알고리즘

1. 모든 물건 $j \in J$ 에 대해, $p_j \leftarrow 0$
2. 노란 행렬을 만들고 최소의 개수로 행렬의 0을 모두 덮는 방법 $I' \subseteq I, J' \subseteq J$ 찾는다
3. 만약 $|I'| + |J'| < n$ 이면,
 $\varepsilon \leftarrow$ 노란 행렬의 $I \setminus I', J \setminus J'$ 중 최소 절댓값
경쟁이 붙은 $j' \in J'$ 에 대해, $p_{j'} \leftarrow p_{j'} + \varepsilon$
4. 만약 $|I'| + |J'| = n$ 이면,
각 구매자에게 원소 값이 0인 물건을 할당한다.

헝가리안 알고리즘



Harold W. Kuhn



Dénes König



Jenő Egerváry

생각해 볼 질문

Q1.

최소 비용 할당을 구하는 방법?

Q2.

다항 시간에 계산하는 방법?

Q3.

구매자가 거짓을 고할 수 있다면?

감사합니다

질문은 언제나 환영합니다



연세대학교 컴퓨터과학과
YONSEI UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING