

불완전성 정리

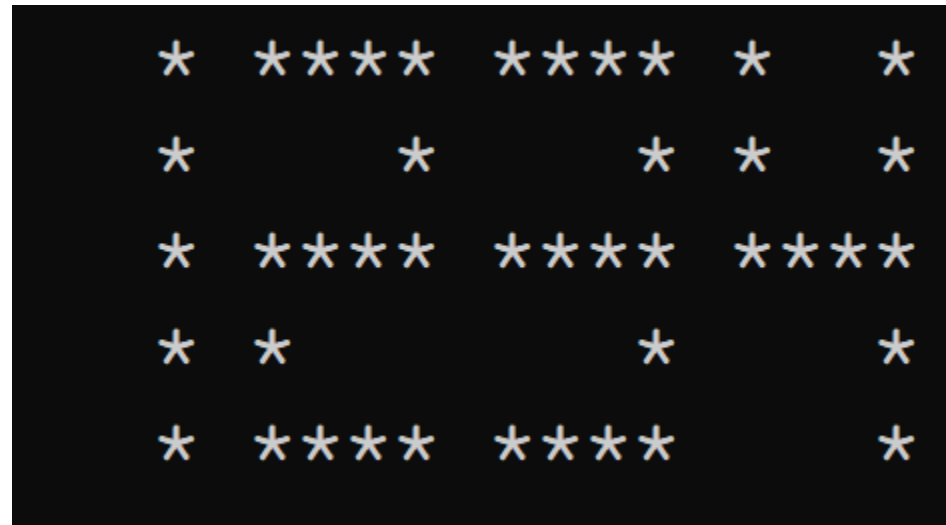
튜링 머신

의식

연세대학교 컴퓨터과학과 최적화및응용 연구실

통합과정 이창열

첫 과제





PANDA

+



NOISE

=



GIBBON
(긴팔원숭이)



HOW

$O(n^2)$

```
a = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
b = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

for i in range(10):
    for j in range(i+1):
        b[i] += a[j]
print(b)
# [1,3,6,10,15,21,28,36,45,55]
```

$O(n)$

```
a = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
b = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
x = 0
for i in range(10):
    x = a[i] + x
    b[i] = x
print(b)
# [1,3,6,10,15,21,28,36,45,55]
```

수학적으로 잘 정의만 된다면

어떤 문제든

컴퓨터 알고리즘으로

해결할 수 있다.

어떤 문제는
컴퓨터 알고리즘으로
해결할 수 **없다!**

정지 문제 halting problem

주어진 프로그램과 그것의 인풋에 대하여, 그 컴퓨팅 과정이 언젠가 끝나면 정지_{halt}한다고 한다.

어떠한 프로그램과 그것의 인풋이 주어지더라도, 해당 컴퓨팅 과정의 정지 여부를 판별하라.

(튜링) 이 문제를 푸는 알고리즘은 존재하지 않는다.

디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

1. 모든 자연수를 세 개의 제곱수(squared number)들의 합으로 표현할 수 있는가?

$$0 = 0 + 0 + 0$$

$$1 = 1 + 0 + 0$$

$$2 = 1 + 1 + 0$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$4 = 2^2 + 0 + 0$$

$$5 = 2^2 + 1 + 0$$

$$6 = 2^2 + 1 + 1$$

$$7 = \dots$$

NO

디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

2. 모든 자연수를 네 개의 제곱수(squared number)들의 합으로 표현할 수 있는가?

$$\begin{aligned}0 &= 0 + 0 + 0 + 0 \\1 &= 1 + 0 + 0 + 0 \\2 &= 1 + 1 + 0 + 0 \\3 &= 1 + 1 + 1 + 0 \\4 &= 2^2 + 0 + 0 + 0 \\5 &= 2^2 + 1 + 0 + 0 \\6 &= 2^2 + 1 + 1 + 0 \\7 &= 2^2 + 1 + 1 + 1 \\&\dots\end{aligned}$$

(라그랑주 Lagrange, 1770) YES

디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

3. 페르마의 마지막 정리

$$\nexists n, x, y, z \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (x + 1)^{n+3} + (y + 1)^{n+3} = (z + 1)^{n+3}$$

(와일즈_{Wiles}, 1994) **True**

디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

4. 2보다 큰 모든 짝수를 두개의 소수(prime number)의 합으로 표현할 수 있는가?

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 5 + 5$$

$$12 = 5 + 7$$

...

(골드바흐의 추측_{goldbach conjecture}, 1742) 힐베르트의 8번째 문제 중 하나

디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

(마티야세비치 Matiyasevich, 1970) 그런 알고리즘은 없다.

알고리즘, 인공지능 의식적 사고

인간의 사고에 대한 관점

인간의 사고는 (아주 복잡한) 알고리즘이다.

인간의 사고는 알고리즘으로서 원리상 시뮬레이션 할 수 있다.
하지만, 그 자체만으로 인식이 생겨나지 않는다.

인간의 사고를 알고리즘으로 시뮬레이션하는 것은 수학적으로 불가능하다.

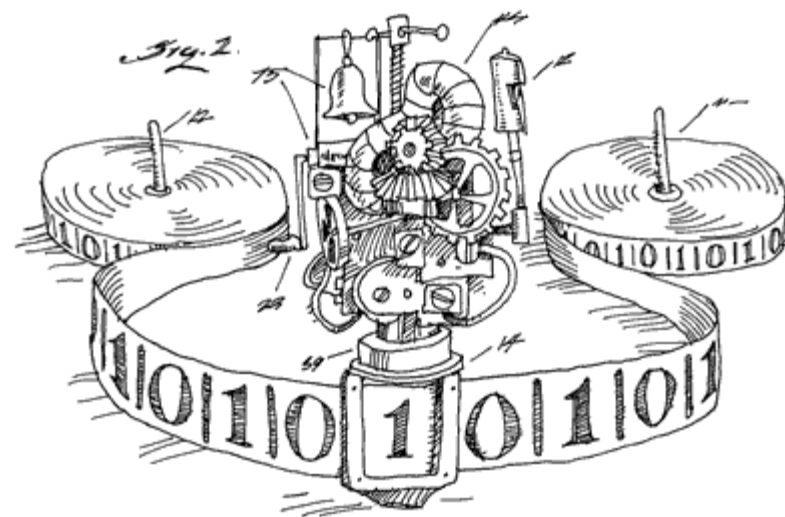
알고리즘이란

알고리즘의 정의 = 튜링 머신의 활동 = 컴퓨팅

튜링 머신 Turing machine

현대식 범용 컴퓨터의 이론적 전신

- 0 혹은 1이 적힐 수 있는 셀_{cell}이 무한히 있는 테이프_{tape}.
- 각 셀을 읽고 쓴 후, 왼쪽으로 혹은 오른쪽으로 1칸 이동하는 헤드_{head}.
- 유한한 수의 가능한 (내부) 상태_{state}와 규칙들
 - 〈state, read〉 → 〈state, write, L/R/STOP〉
- 헤드의 왼편에 있는 셀은 전부 0이라 가정
- 입력은 헤드의 오른편에, 출력은 (끝났을 때) 헤드 왼편에 위치한다 가정



튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, STOP \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, STOP \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, STOP \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, STOP \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, STOP \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

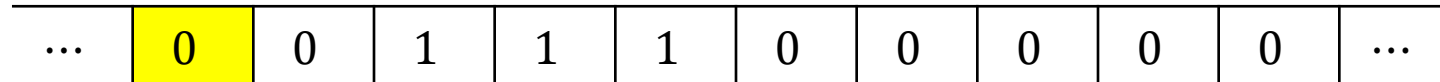
...	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$



$state = 0$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$		
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$		
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$		

...	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$		
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	

...	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$		
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	

...	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$		
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	

...	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$		
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$		
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$		

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$		
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$				
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$			
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$			
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$			

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$		
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$		
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$		

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$								
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$								
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$								

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$					
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$				
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$				
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$				

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$				
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$			
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$			
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$			

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$				
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$			
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$			
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$			

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

				$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$							
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$



$state = 0$

확장 2진 표현법

1진법 체계는 “비효율적”

그냥 2진화는 인풋이 여러 개일 때 구분해내기 어렵다는 문제가 있다.
- 또한 테이프에 데이터뿐 아니라 온갖 규칙들도 입력시켜야 할 수도 있다.

축약_{contraction} 기법

0100010110101011010001110101
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
1 00 1 2 1 1 2 1 00 3 1 1

0과 1을 제외한 나머지 숫자들을 특별한 표식이나 명령어로 해석할 수 있다.

예를 들어 2를 (숫자를 분리하는) 심표로, 3을 특정 명령어로 해석한다면

$(1001)_2, (11)_2, (100)_2, op_3, (11)_2$

확장 2진 표현법

$(1001)_2, (11)_2, (100)_2, \text{op}_3, (11)_2$

확장_{expansion} 기법

$0 \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 10$

$, \rightarrow 2 \text{ or } 110$

$\text{op}_3 \rightarrow 3 \text{ or } 1110$

... 0000|1000|10|110|10|10|110|10|00|1110|10|10|00 ...

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$$5, = (101)_2, = 10010110$$

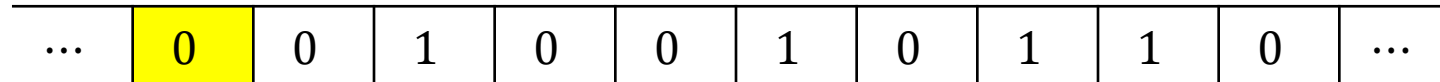
...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

state = 0

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$



$state = 0$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

튜링 머신 $XN \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
 $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$ $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$
 $\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$



$$100100 = (1010)_2 = 10$$

$state = 0$

인간의 사고에 대한 관점

튜링 머신의 한계는 무엇일까?

인간은 판별할 수 있지만 튜링 머신은 판별할 수 없는 무언가가 있을까?

만약 있다면 그러한 것이 있다면

인간의 사고를 알고리즘으로 시뮬레이션하는 것은 수학적으로 불가능하다.

괴델의 불완전성의 정리와 의식의 컴퓨팅 불가능성

괴델의 불완전성 정리

공리들과 추론 규칙들로 이루어진 형식 수학 체계(formal mathematical system) 내에서
증명을 갖지 못하는 참명제가 존재한다.



공리들과 규칙들을 잘 정의하면
그 체계 내에서 표현할 수 있는 모든 수학 문장들에
대해서 참, 거짓 여부를 결정할 수 있지 않을까?

의식의 비컴퓨팅성 증명

Part 1.

튜링 머신의 입력을 자연수로 표현할 수 있었다. 더 나아가 모든 튜링 머신에 번호를 붙여 나열할 수 있다.

튜링 머신이 특정 입력을 받아 수행하는 것은 두 자연수의 순서쌍으로 표현됨

두 자연수를 입력으로 받아, 그것에 해당하는 컴퓨팅이 정지하지 않음을 알아내는 범용 튜링 머신 A 를 생각

Part 2.

우리는 특정 자연수 순서쌍에 해당하는 컴퓨팅이 정지하지 않음을 추론할 수 있지만

위에서 만든 범용 튜링 머신 A 는 알아낼 수 없다.

범용 universal 튜링 머신

임의의 튜링 머신 T 의 규칙들과 T 에 주어질 입력을 입력받는 범용 튜링 머신

$\langle \text{state}, 0/1 \rangle \rightarrow \langle \text{state}, 0/1, L/R/STOP \rangle$

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$

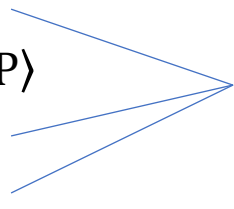
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

dummy rules



범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 2, 0, L \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 0, STOP \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 1, 1, 110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 10, 0, 1110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 0, 0, 11110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary
R: 2 or 110
L: 3 or 1110
STOP: 4 or 11110
**
<00110>
<11110>
<00110>
<1001110>
<00110>
<0011110>
<00110>
<00110>

범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 00110 \rangle \langle 11110 \rangle \langle 00110 \rangle \langle 1001110 \rangle \langle 00110 \rangle \langle 0011110 \rangle \langle 00110 \rangle \langle 00110 \rangle$

범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

00110111100011010011100011000111100011000110 = 3817480157382

범용 universal 튜링 머신

$XN \times 2$ 는 3817480157382번째 튜링 머신, 혹은 $T_{3817480157382}$.

똑같은 방식으로 $UN+1$ 은 T_{911326} .

일반적으로 임의의 튜링 머신 T 에 고유한 자연수를 부여할 수 있다. (즉, 튜링 머신을 나열할 수 있다.)

자연수 q 에 대응되는 튜링 머신 T 가 받은 입력이 자연수 n 에 대응된다고 하자.

그렇다면 범용 튜링 머신의 입력은 다음과 같다.

q 의 확장 2진수 + 특정 코드(e.g., 111110) + n 의 확장 2진수

모든 컴퓨팅을 두 자연수의 순서쌍으로 표현 가능

범용 튜링 머신 A

두 자연수 q, n 을 입력으로 받아 그것으로 정의되는 컴퓨팅 $T_q(n)$ 이 정지하지 않음을 알아내려 하는 범용 튜링 머신 A.

- $A(q, n)$ 이 정지했을 때만 컴퓨팅 $T_q(n)$ 이 정지하지 않음을 알 수 있다.
- $A(q, n)$ 이 정지하지 않았으면 컴퓨팅 $T_q(n)$ 의 정지 여부에 대해 아무것도 말해주지 않는다.

A(q,n)이 정지했음의 의미

A(q,n)이 정지했음은 $T_q(n)$ 이 증명되었음을 의미한다.

1. 어떤 자연수 q' 에 대해 $T_{q'}(n)$ 이 다음과 같다고 하자.

“모든 자연수를 n 개의 제곱수들의 합으로 표현할 수 있는지 모든 경우의 수를 체크하는 알고리즘”

- $T_{q'}(3)$ 은 정지한다. $T_{q'}(4)$ 는 정지하지 않는다. ...

2. 어떤 자연수 q'' 에 대해 $T_{q''}(n)$ 이 페르마의 정리를 모든 경우의 수로 확인하는 알고리즘이라 하자.

$$\nexists n, x, y, z \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3} = (z+1)^{n+3}$$

- $T_{q''}(3)$ 은 정지하지 않는다. $T_{q''}(4)$ 는 정지하지 않는다. $T_{q''}(5)$ 는 정지하지 않는다. ...

3. 어떤 자연수 q''' 에 대해 $T_{q'''}(2)$ 이 골드바흐의 추측을 모든 경우의 수로 확인하는 알고리즘이라 하자.

- $T_{q'''}(2)$ 이 정지할까?

범용 튜링 머신 A

튜링 머신 A를 그것을 정의하는 규칙을 통해 입력이 정지할지를 증명을 작성하는 튜링 머신이라 생각해도 좋다.

$A(q, n)$ 이 정지하면, 이것은 바로 $T_q(n)$ 의 증명이 완료된 것!

만약 어떤 q' 와 n' 에 대해서 $A(q', n')$ 이 영원히 정지하지 않을 것을 안다면,
튜링 머신으로는 $T_{q'}(n')$ 에 대한 증명을 완료할 수 없다는 것을 시사

그런데 우리가 $T_{q'}(n')$ 이 정지하지 않는다는 사실을 안다면?

의식의 비컴퓨팅성 증명

Part 2.

우리는 특정 자연수 순서쌍에 해당하는 컴퓨팅이 정지하지 않음을 추론할 수 있지만

위에서 만든 범용 튜링 머신 A 는 알아낼 수 없다.

Part 2

모든 q, n 에 대해서 $A(q, n)$ 이 정지하면 컴퓨팅 $T_q(n)$ 이 정지하지 않는다.

따라서, $A(n, n)$ 이 정지하면 컴퓨팅 $T_n(n)$ 이 정지하지 않는다. ... (1)

이때 $A(n, n)$ 은 n 이라는 수를 입력으로 받는 특정 컴퓨팅으로 볼 수 있다.

따라서 $A(n, n) = T_k(n)$ 인 k 가 존재한다. ... (2)

Part 2

$A(n, n)$ 이 정지하면 컴퓨팅 $T_n(n)$ 이 정지하지 않는다. ... (1)

$A(n, n) = T_k(n)$ 인 k 가 존재한다. ... (2)

(2)에 $n = k$ 를 대입해보자. (즉, T_k 의 입력으로 k 가 주어졌다고 해보자.)

$$A(k, k) = T_k(k). \dots (2')$$

(1)에 $n = k$ 를 대입하자.

$A(k, k)$ 가 정지하면 컴퓨팅 $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다. ... (1')

(1')과 (2')을 합치면 다음과 같다. $T_k(k)$ 가 정지하면 컴퓨팅 $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다.

Part 2

$T_k(k)$ 가 정지하면 컴퓨팅 $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다.

따라서 $T_k(k)$ 가 정지한다면 모순이 발생하기 때문에, 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

즉 $A(k, k)$ 가 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

Recall.

만약 어떤 q' 와 n' 에 대해서 $A(q', n')$ 이 영원히 정지하지 않을 것을 안다면,

튜링 머신으로는 $T_{q'}(n')$ 에 대한 증명을 완료할 수 없다는 것을 시사

그런데 우리가 $T_{q'}(n')$ 이 정지하지 않는다는 사실을 안다면?

Part 2

$T_k(k)$ 가 정지하면 컴퓨팅 $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다.

따라서 $T_k(k)$ 가 정지한다면 모순이 발생하기 때문에, 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

즉 $A(k, k)$ 가 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

Recall.

만약 어떤 k 에 대해서 $A(k, k)$ 가 영원히 정지하지 않을 것을 안다면,
튜링 머신으로는 $T_k(k)$ 에 대한 증명을 완료할 수 없다는 것을 시사

그런데 우리가 $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다는 사실을 알고 있다.

괴델의 불완전성 정리와 의식의 컴퓨팅 불가능

이 증명을 따라가는 것이 의식적 사고 (혹은 이해, 통찰력, ...)에 해당함에 동의한다면

인간의 사고를 알고리즘으로 시뮬레이션하는 것은 수학적으로 불가능하다.

비컴퓨팅적 물리학의 필요성

고전물리학과 양자물리학

고전물리학에서는 한 물리계를 정의하는 데 필요한 모든 데이터를 어느 주어진 시간에 특정할 수 있으며, 그 계의 향후 행동은 이 데이터로 완벽히 결정될 뿐 아니라 튜링 컴퓨팅으로 계산될 수 있다.

양자물리학에서는 완벽하게 무작위적인 속성의 추가적인 자유가 있는데, 그런 요소들이라 하더라도 비알고리즘적 활동을 제공하지는 않는다.

의식의 과학을 이해하기 위해선 비컴퓨팅적인 새로운 과학이 필요하다.

일반상대성이론과 양자론의 원리를 결합시킨 “양자중력적” 현상?

창발 현상

보통의 물질들은 컴퓨팅적 활동을 하지만, 두뇌의 구성은 비컴퓨팅적 활동을 한다.

두뇌의 “미묘한 구성”이 있어야 그러한 창발성을 떨 수 있다.

미세소관?



Thank you

