Quantum Computing

Quantum computin이란 무엇인가?

Index

1. Quantum computer와 Qubit의 개념
2. Quantum 회로란?
3. Deutsch's Algorithm

퀀텀이란?

- 현재까지 알려진 바, 상호작용을 하는 가장 작은 물리적 단위
- 입자와 파동의 특징을 둘 다 갖는 개체

불확정성 원리

- 관측을 위해서는 다른 개체와의 상호작용이 필수인데,
이 과정에서 개체의 파동에 간섭이 일어나 위치와 에너지를 동시에 정밀하게 측정할 수 없음

- 하나의 성질을 측정하는 과정에서 다른 성질에 간섭이 일어나 측정한 성질의 정확성에는 물리적 한계가 존재함

- 따라서 어떤 양자의 상태는 파동 함수(확률 밀도 함수)의 형태로 나타내게 됨

파동 함수 붕괴

- 어떤 양자를 관측하게 되면,
  양자가 가지고 있던 파동 함수의 상태에서 벗어나서,
  관측한 물리량에 따른 성질로 고정되게 됨

- 슈뢰딩거의 고양이 "고양이가 죽었는지 살았는지는 열어봐야 안다"가 이 현상을 비유한 설명

양자 얽힘

- A 양자를 관측하여 상태를 관측하고 나면,
  A 양자와 얽혀 있던 B 양자의 상태를 알 수 있게 된다는 성질

- A와 B가 상호작용을 통해 얽힘 상태가 되었다면, 차후에 A를 관측함으로써 B가 그때 어떤 상태였는지를 알 수 있다는 것

퀀텀이란!

- 퀀텀은 **측정**이 상태에 영향을 미치는 미시세계에서의 현상을 이용하는 것
- 퀀텀은 측정하기 전까지는 어떤 상태인지 정확하게 알 수 없어, 관측 시점에 다양한 상태가 될 수 있는 **가능성**이 있는 상태
- 하나의 퀀텀을 관측함으로써 다른 퀀텀의 상태를 알 수 있는 **양자 얽힘** 현상이 있음

- 측정, 확률, 양자 얽힘 현상을 이용하여 계산을 하게 됨

Qubit의 개념

- 실제의 물리적 현상을 내려놓고
  퀀텀의 수학적 개념과,
  선형대수를 이용하여 계산 모델을 만든 것

- Bra–Ket notation(Dirac notation)을 이용하여 표현하게 됨

$$ket\colon |\psi\rangle = \begin{bmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{bmatrix}; (\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1)$$

$$bra\colon \langle\psi| = [\psi_1 \quad \psi_2]; (\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1)$$

Bra–Ket notation(Dirac notation)

- 수학적으로는 linear function(bra)와 vector(ket)으로 해석되나, 퀀텀에서는 ket으로 퀀텀 상태를 나타내는 용도로 사용됨

$$bra\text{: } \langle\psi| = [\psi_1 \quad \psi_2]; (\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1)$$

$$ket\text{: } |\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}; (\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1)$$

- 동일한 상태에 대한 bra와 ket은 서로에 대한 conjugate transpose로 구할 수 있음

Bra–Ket notation(Dirac notation)

- 특히나, 주로 사용되는 6개의 single-qubit들은 다음과 같음
- 기본 single-qubit

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

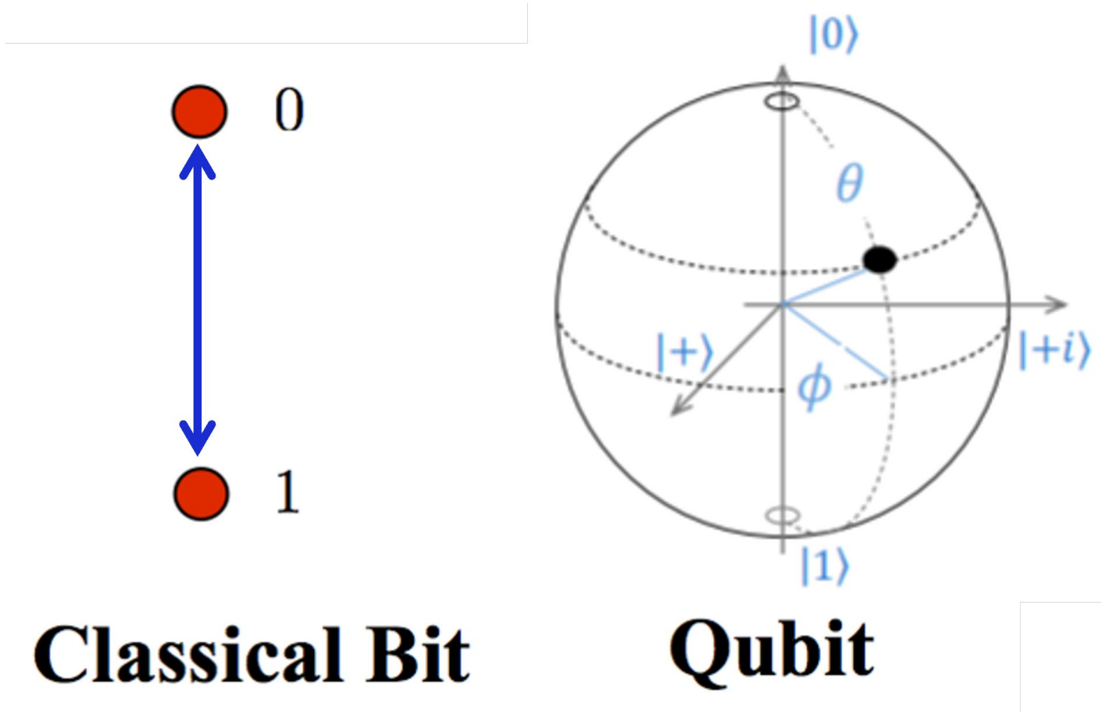
- 가끔 보는 single-qubit

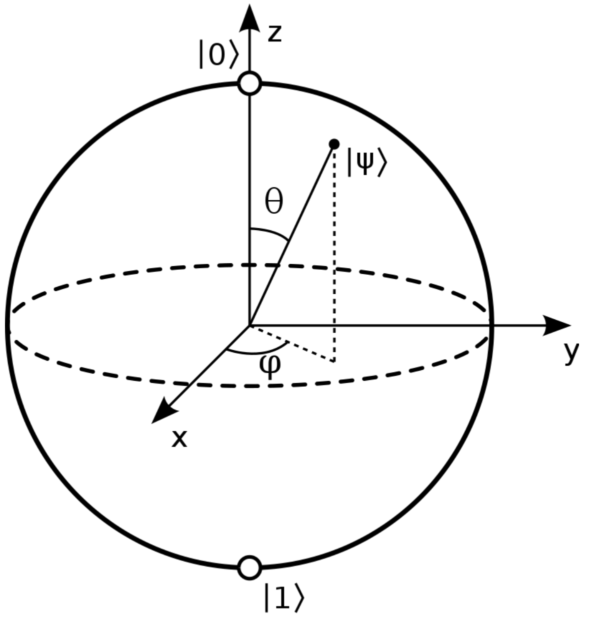
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), |-\mathrm{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

Bloch Sphere Representation

- 6개의 single-qubit들을 기준으로 qubit을 벡터화한 표현 방식





- $|\psi\rangle = \cos\theta\,|0\rangle + \sin\theta\, e^{i\phi}|1\rangle$

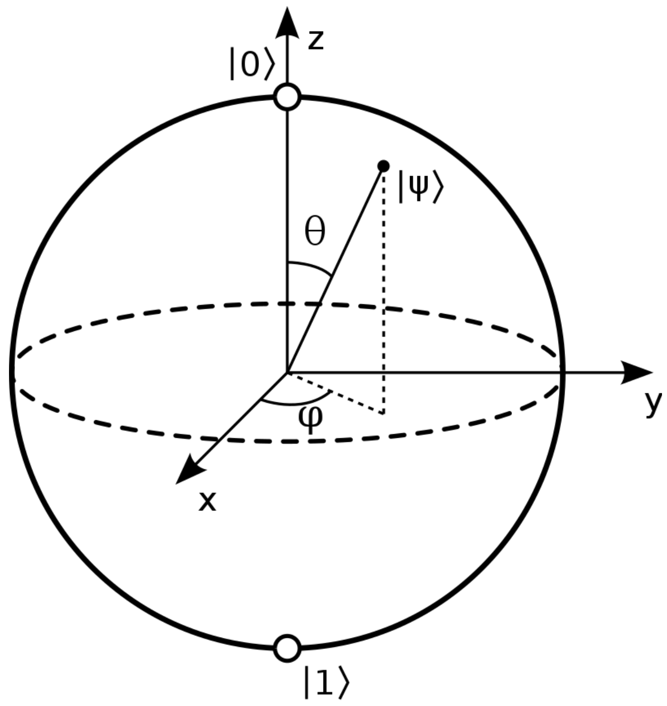
Quantum 회로란?

- 기본 컴퓨팅 모델에서 사용되고 있는 논리 게이트와 유사, 다만 Quantum에 적용되는 논리 게이트들
- Truth table 대신 transformation 행렬로 정의됨

1. Single Qubit Gates
2. Multi Qubit Gates

Quantum 회로란 - Single Qubit Gates

- Pauli Transformation Gates
  - ➢ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - ➢ $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (x축 180도 회전)
  - ➢ $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ (y축 180도 회전)
  - ➢ $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (z축 180도 회전)
- Hadamard Gate
  - ➢ $H = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (y축 90도 회전)



$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|0\rangle + \sin\theta\, e^{i\phi}|1\rangle$$

Quantum 회로란 - Multi Qubit Gates

- $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = |\psi_1 \psi_2\rangle$
- 일반적인 경우에는 내적을 이용

Quantum 회로란 - Multi Qubit Gates

- CNOT gate, SWAP gate
- $CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Toffoli gate, Fredkin gate
- 각각

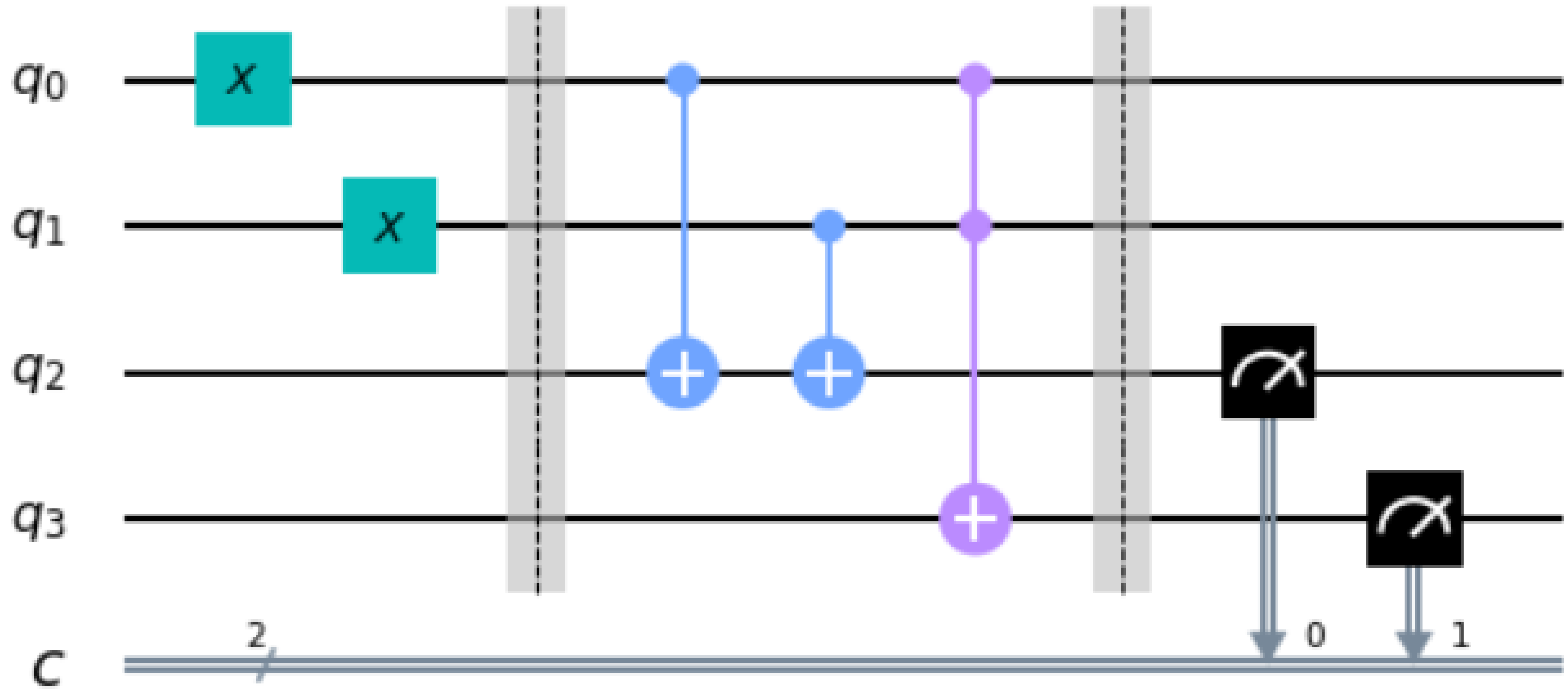
Quantum 회로란 - Multi Qubit Gates

- CNOT gate(CX): 첫번째 qubit이 1일 경우 X 게이트를 적용
- $CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- CY와 CZ도 존재

Quantum 회로란 - Multi Qubit Gates

- Toffoli gate(CCX): 첫번째와 두번째 qubit이 1일 경우 X 게이트를 적용
- Fredkin gate(CSWAP): 첫번째 qubit이 1일 경우 SWAP 적용

Quantum 회로란



Deutsch’s Algorithm

- 함수 $f: 0,1^n \rightarrow 0,1$이 주어졌을 때,
  f가 상수 함수 혹은 균형함수인지 판별하라

- 균형함수는 절반의 인풋에 대해서는 1, 나머지는 0을 반환하는 함수를 뜻함

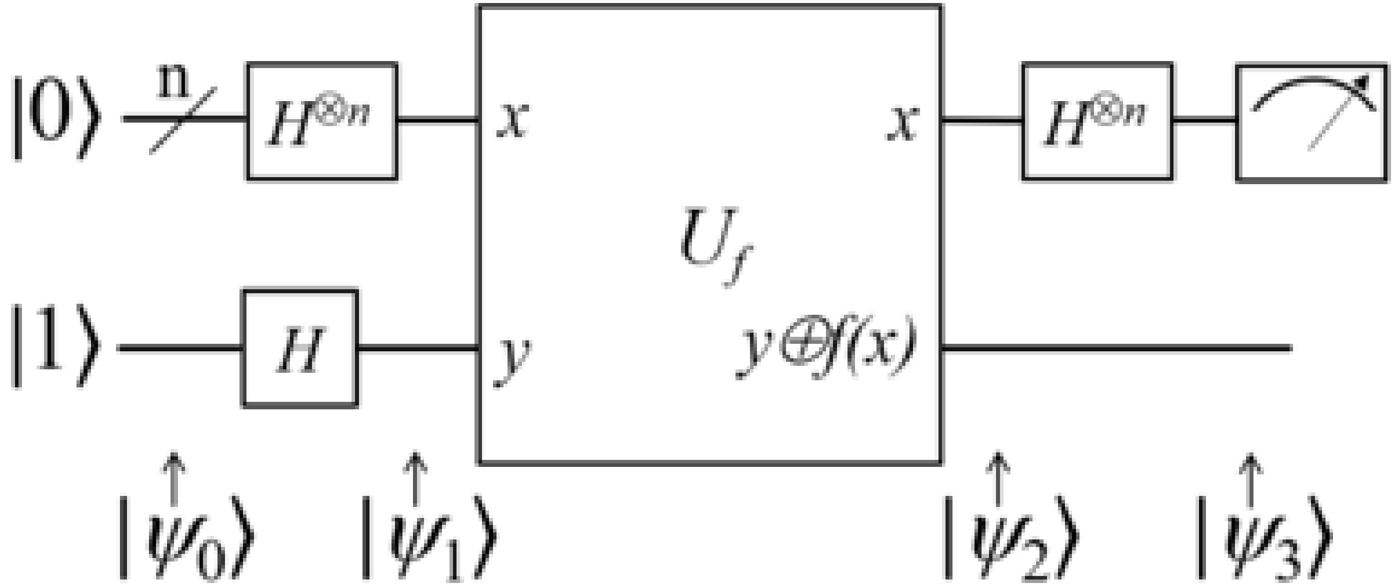
Deutsch's Algorithm

- 함수 $f: 0,1^n \rightarrow 0,1$이 주어졌을 때,
  f가 상수 함수 혹은 균형함수인지 판별하라

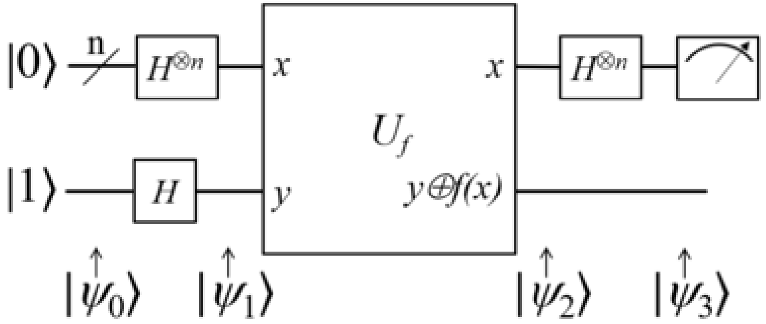
- 현재의 컴퓨팅 모델로는 최악의 경우 $2^{n-1} + 1$의 경우의 수를 따져봐야 함

Deutsch's Algorithm

- 함수 $f: 0,1^n \rightarrow 0,1$이 주어졌을 때,
  f가 상수 함수 혹은 균형함수인지 판별하라



Deutsch's Algorithm



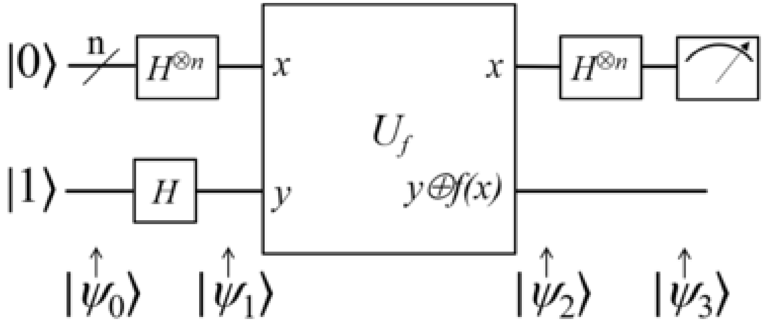
- 함수 $f: 0,1^n \rightarrow 0,1$이 주어졌을 때,
  f가 상수 함수 혹은 균형함수인지 판별하라

- f의 왼쪽을 먼저 해석하면,

$$|x\rangle^{\otimes n} = H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \Sigma_{x \in 0,1^n} (-1)^{f(x)} |x\rangle$$

$$|y\rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Deutsch’s Algorithm



- 함수 $f: 0{,}1^n \to 0{,}1$이 주어졌을 때, f가 상수 함수 혹은 균형함수인지 판별하라

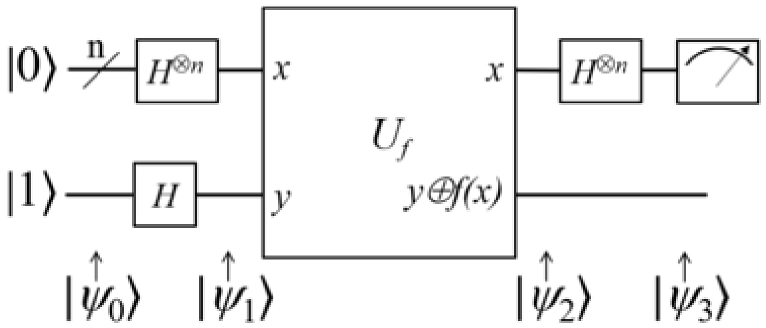
- f를 적용하고 나면,

$$f\left(|x\rangle^{\otimes n} \otimes |y\rangle\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \Sigma_{x \in 0,1^n} |x\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |f(x)\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1 \oplus f(x)\rangle\right)$$

- f(x)가 0 또는 1의 상수함수일 경우

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\right)$으로 나옴

Deutsch's Algorithm



- 함수 $f: 0,1^n \rightarrow 0,1$이 주어졌을 때,
  f가 상수 함수 혹은 균형함수인지 판별하라

- 따라서 다시 Hadamard 게이트를 적용시켜 주면,
  f가 상수함수일 경우 100% 확률로 $|0\rangle$ 벡터가 나오게 됨

Quantum Fourier Transform (QFT)