양자 오토마타를 통한 단항 한원소 언어 표현

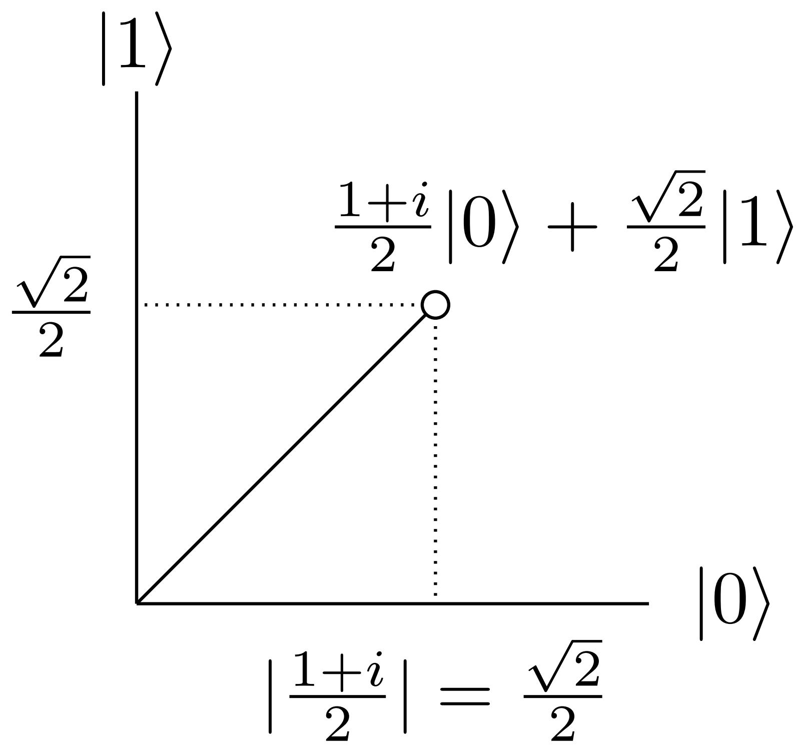
성시철 한요섭

연세대학교

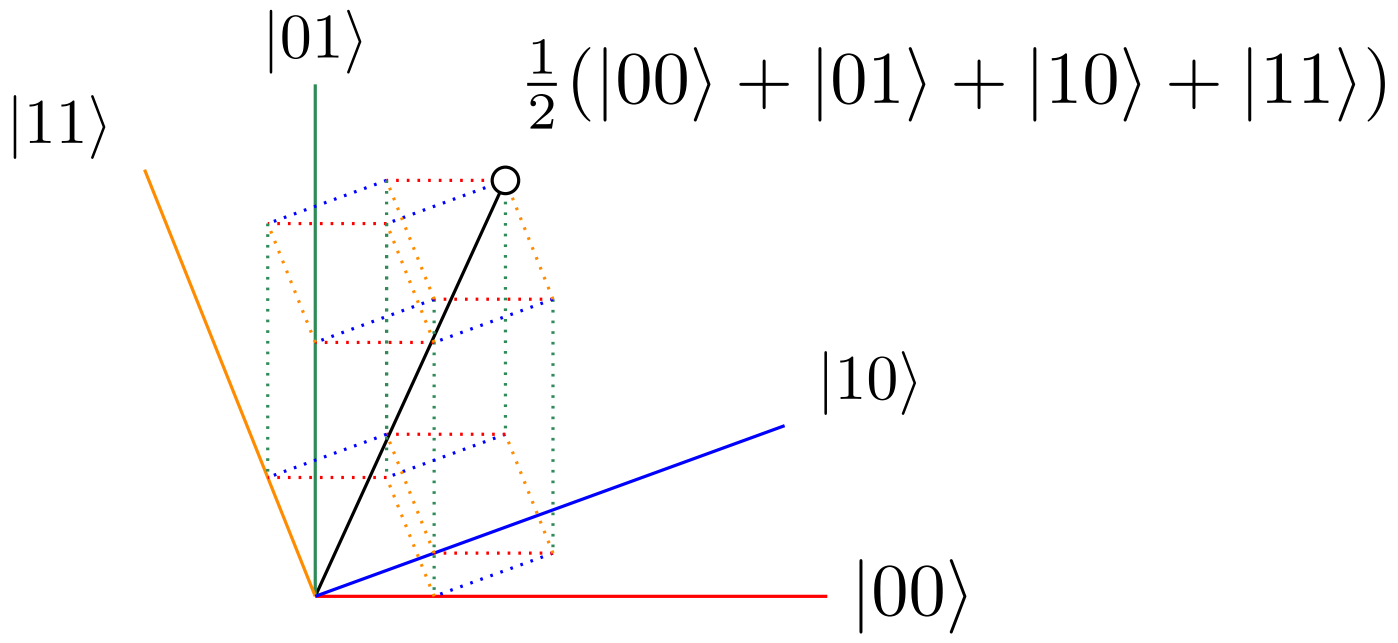
1월 30일, 연세대학교

양자상태

n개의 큐비트qubit에 대해, 이들의 양자상태quantum state $|\psi\rangle$는 길이가 1인 2^n 차원 복소벡터이다.



1 큐비트 양자상태의 예

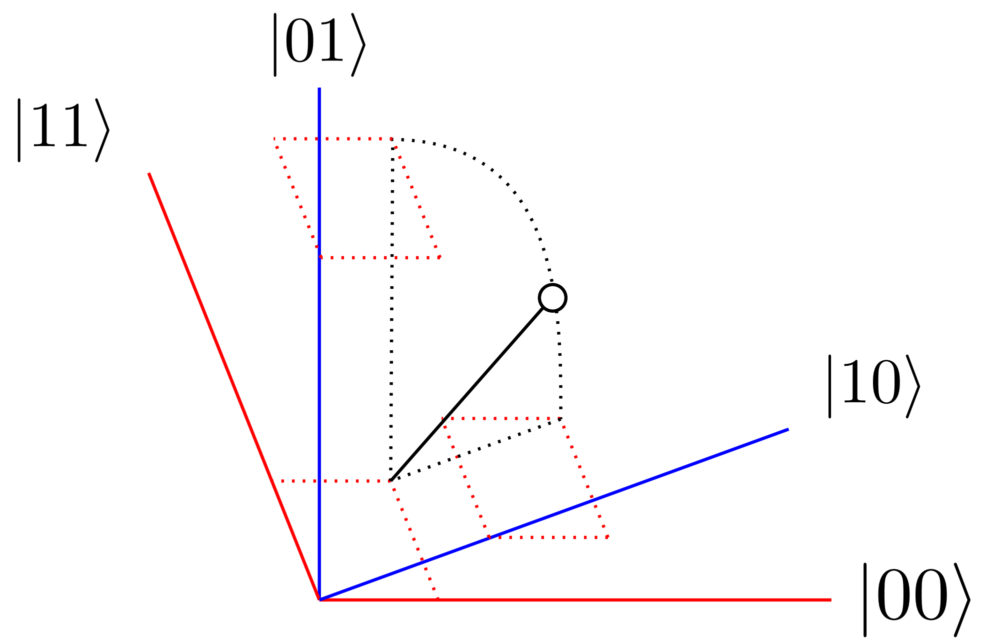


2 큐비트 양자상태의 예

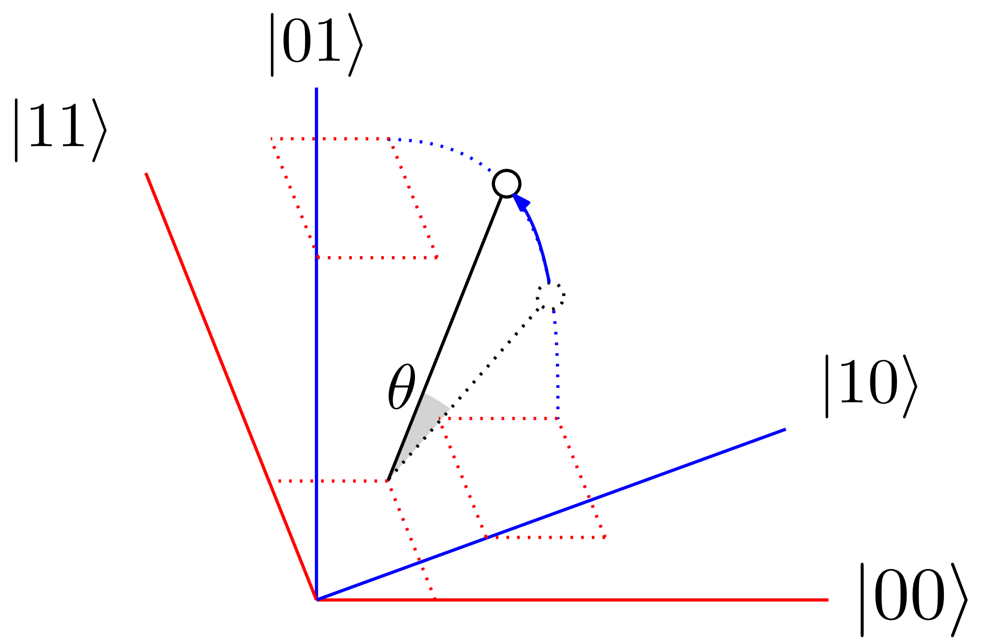
유니타리 행렬

유니타리unitary 행렬은 길이를 보존하는 선형 변환이다(예: 회전변환 등.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



유니타리 변환 $\longrightarrow$

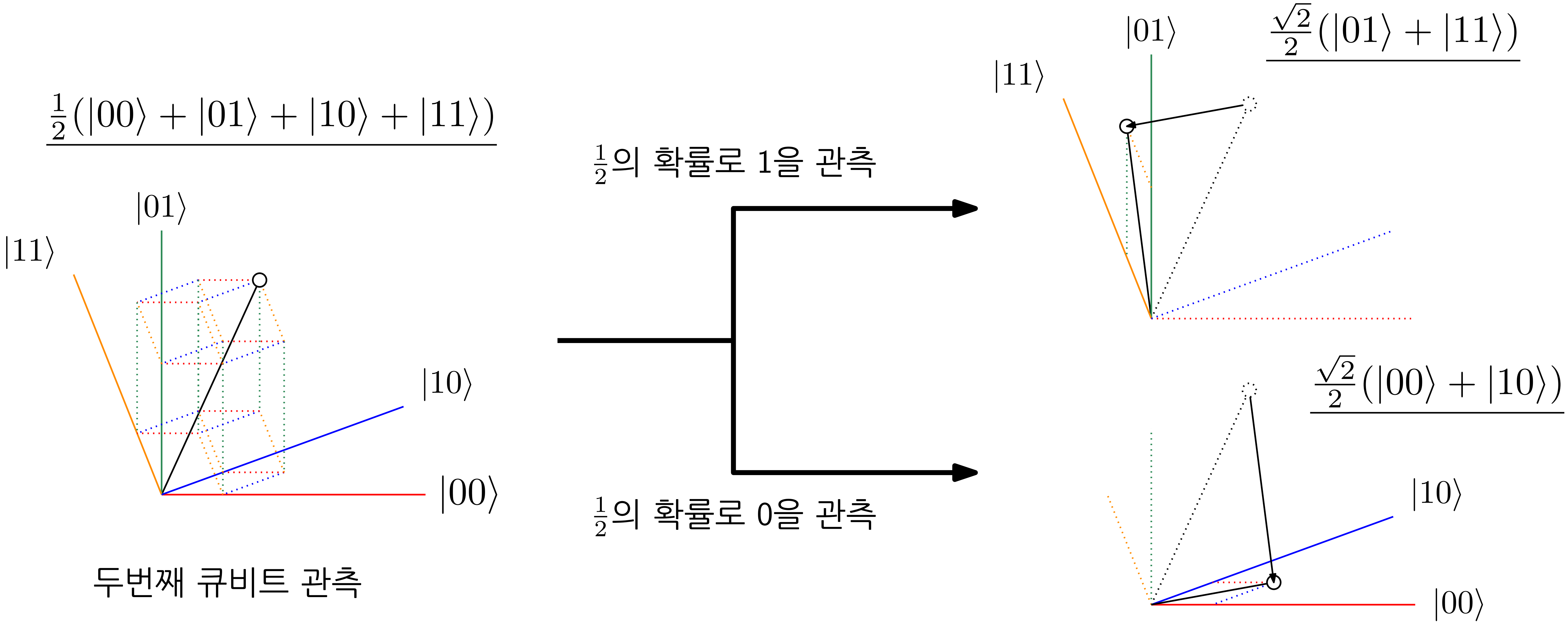


$|00\rangle|11\rangle$-평면을 회전축으로 하는 $|01\rangle$축에서 $|10\rangle$축으로의 회전변환의 예

관측

큐비트를 관측measure하는 경우:
부분 공간 E에 투영된 길이 l에 대하여 l^2의 확률로 해당 공간으로 투영된다.

이 때, 줄어든 길이 $l \leq 1$은 해당 값으로 관측될 확률 l^2을 의미한다.



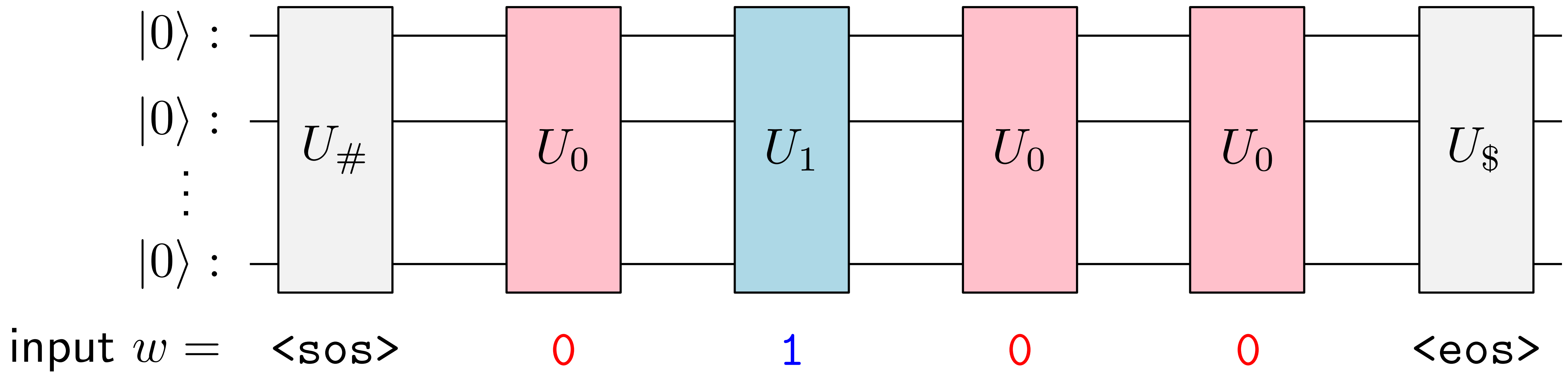
Quantum Finite Automata

양자 오토마타Quantum Finite Automaton, QFA는 각 상태를 유한한 수의 큐비트로 표현하는 오토마타이다.

대략, QFA는 유한한 큐비트를 사용하는 기계를 대표한다.

1. 입력 문자열 w를 받는다.
2. *확률적으로* w를 수락accept 혹은 거부reject한다.

QFA의 상태 변화 과정을 양자회로도로 표현하면 다음과 같다:

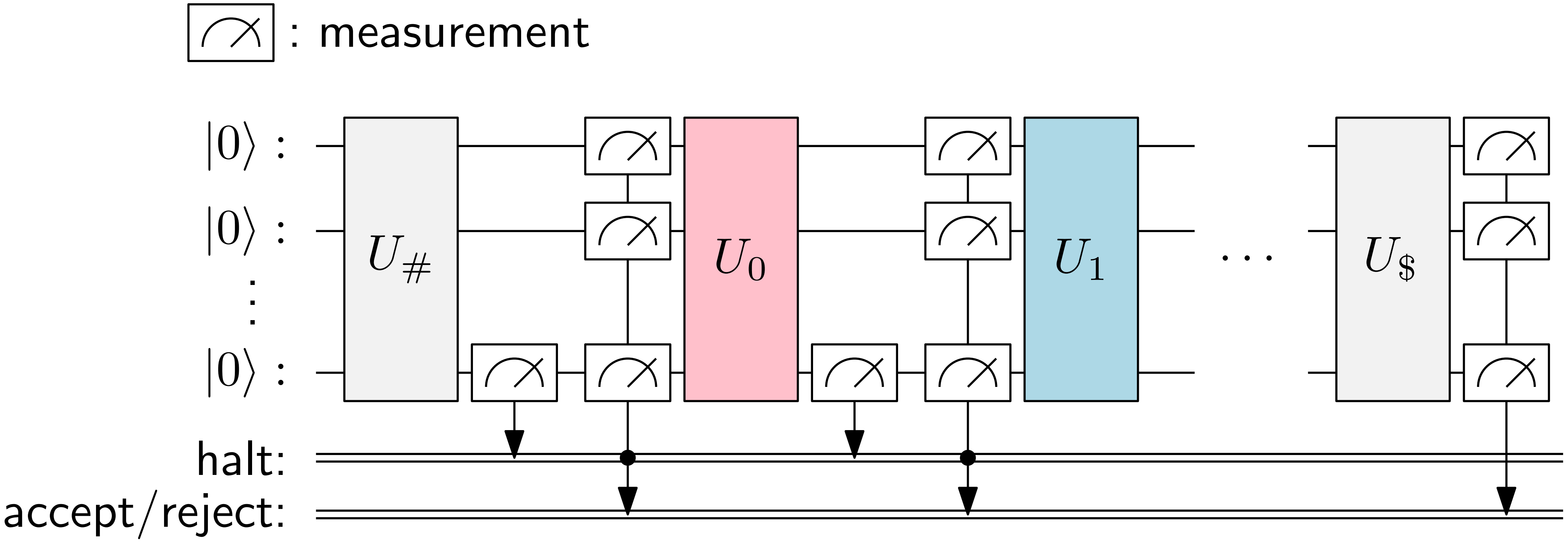


이 때, 우리는 수락 혹은 거부하기 위한 기준을 정해야한다.

Measure-Many QFA

다수측정Measure-Many, MM- QFA는 각 단계마다 측정을 수행한다.

1. 측정 결과가 수락상태accepting state 혹은 거부상태rejecting state라면, 그 즉시 수락 혹은 거부한다.
2. 둘 모두 아니라면 계속 진행한다.



결과적으로, MM-QFA M이 문자열 w를 수락할 확률을 $M(w)$라한다.

유계단측오차

MM-QFA M과 언어 L에 대하여 다음을 만족하는 $\epsilon > 0$이 존재할 때,
M이 L을 유계단측오차one-sided bounded error내로 인식recognize한다고 한다:

모든 문자열 w에 대하여,

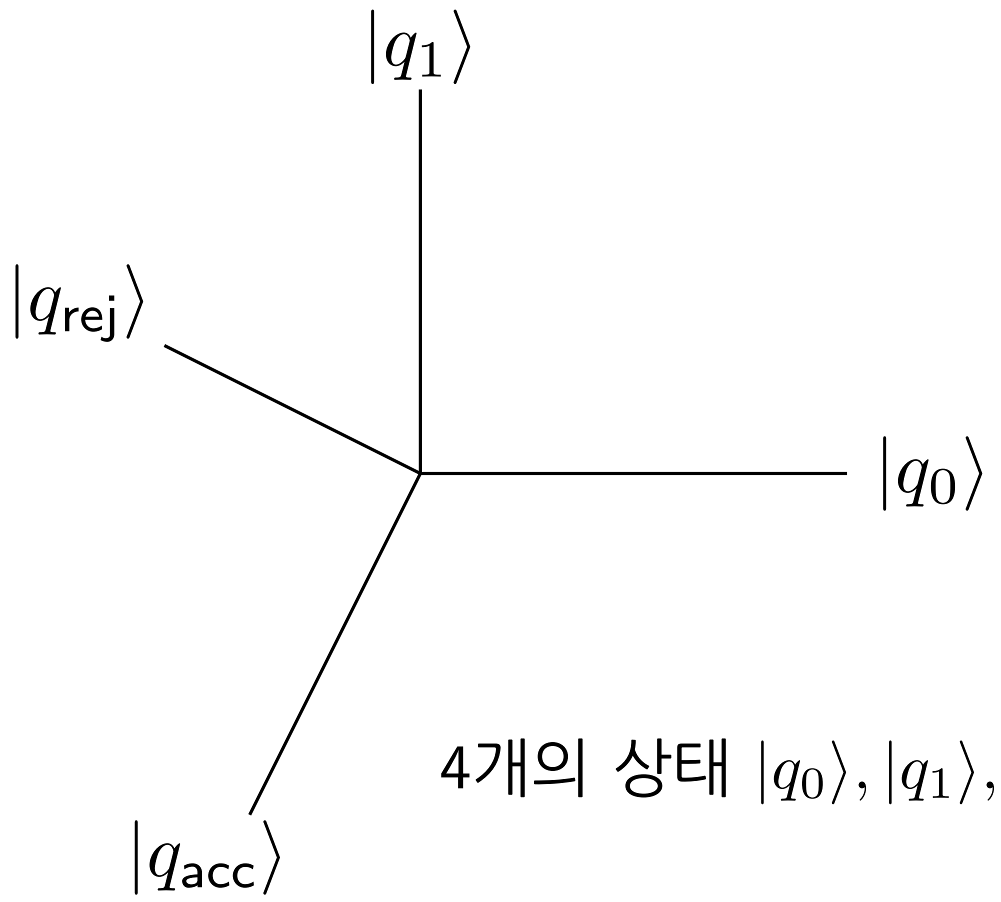
1. $w \in L$일 때, $M(w) = 1$; 이고
2. $w \notin L$일 때, $M(w) < 1 - \epsilon$이다.

일부 정규언어regular language(예: $L((a+b)^*b)$)는 MM-QFA를 통해 인식할 수 없음이 알려져있다 [KW97].

단항 한원소 언어 L_k

임의의 단항 한원소 언어 $\{\sigma^k\}$를 L_k로 표기하자.
이를 표현하기 위한 결정적/비결정적 유한오토마타DFA/NFA는 최소 $k+1$개의 상태를 필요로 한다.

본 연구는 각 L_k에 대하여, 4개의 상태만을 가지고 이를 인식하는 MM-QFA M_k를 구성한다.



4개의 상태 $|q_0\rangle, |q_1\rangle, |q_{\mathsf{acc}}\rangle, |q_{\mathsf{rej}}\rangle$을 갖는 M_k의 상태공간

MM-QFA M_k의 구성

$$U_{\#} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$|q_0\rangle$축에서 $|q_1\rangle$축으로 45° 회전

$$U_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & 0 & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & 0 & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

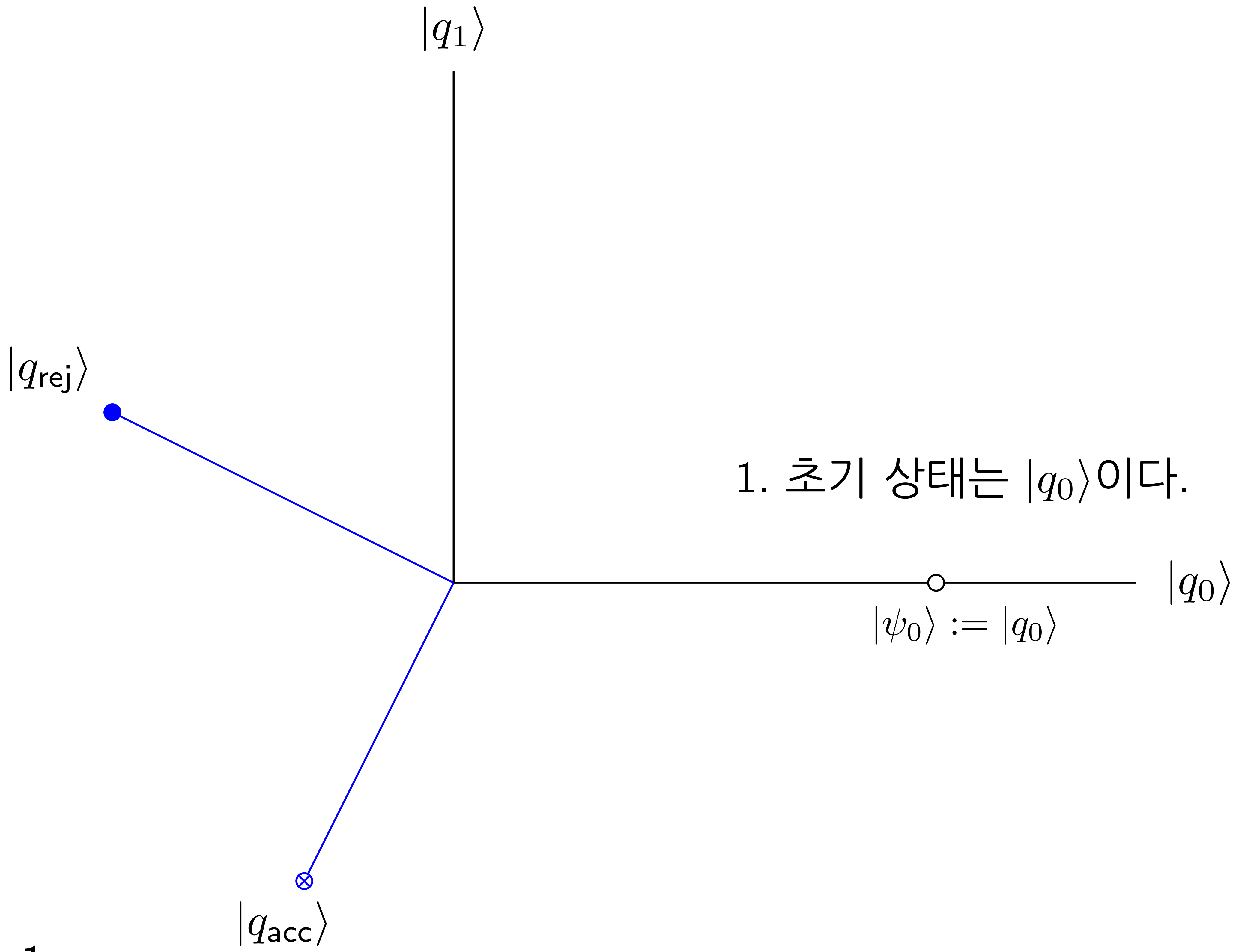
$|q_0\rangle$축에서 $|q_{\mathsf{acc}}\rangle$축으로 60° 회전

$$U_{\$} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2^{k+1}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2^{k+1}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2^{k+1}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2^{k+1}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

σ^k를 읽은 상태 ψ_k를 $|q_{\mathsf{acc}}\rangle$로 보내는 회전

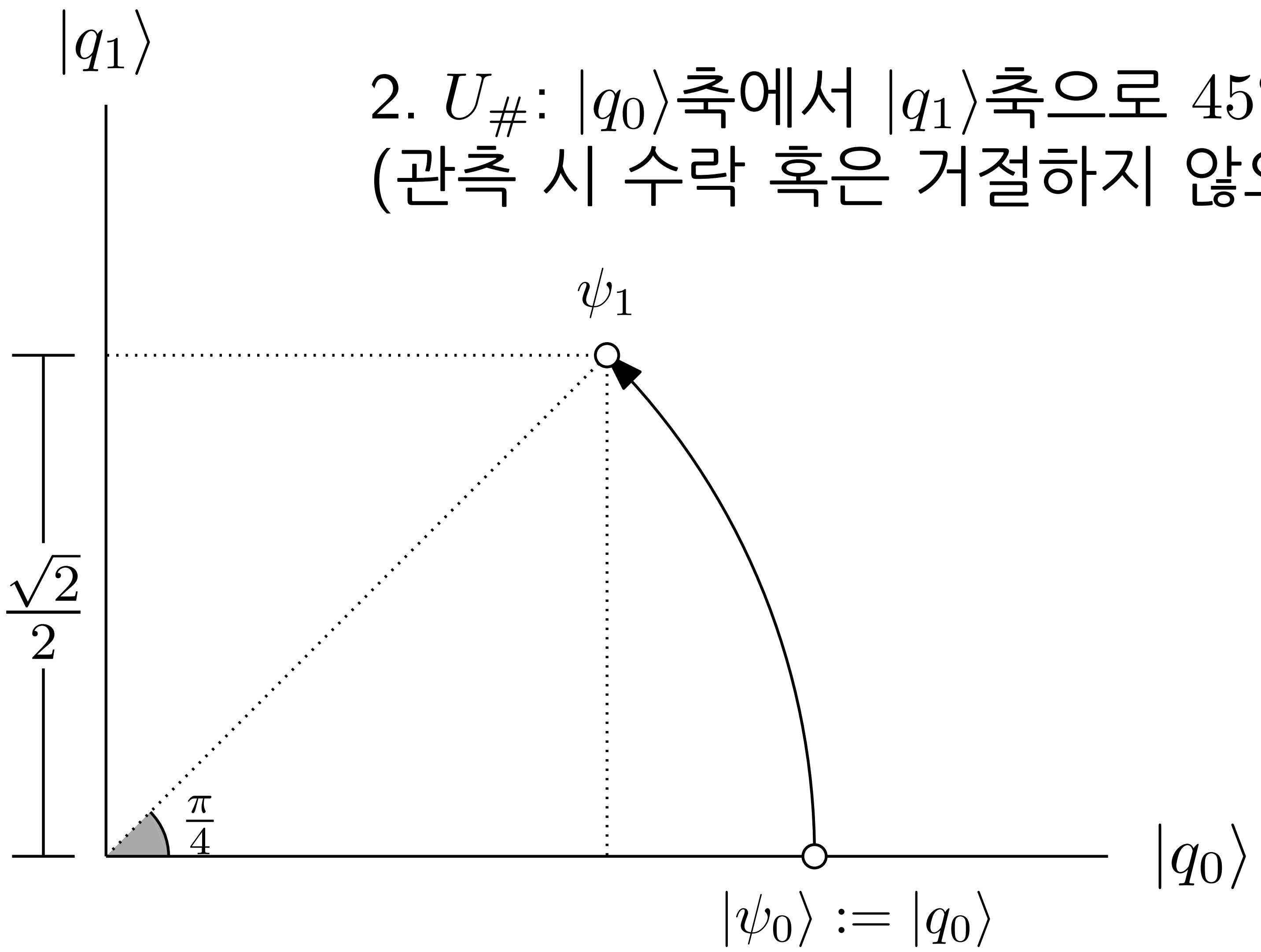
MM-QFA M_k의 동작 과정

1. 초기 상태는 $|q_0\rangle$이다.



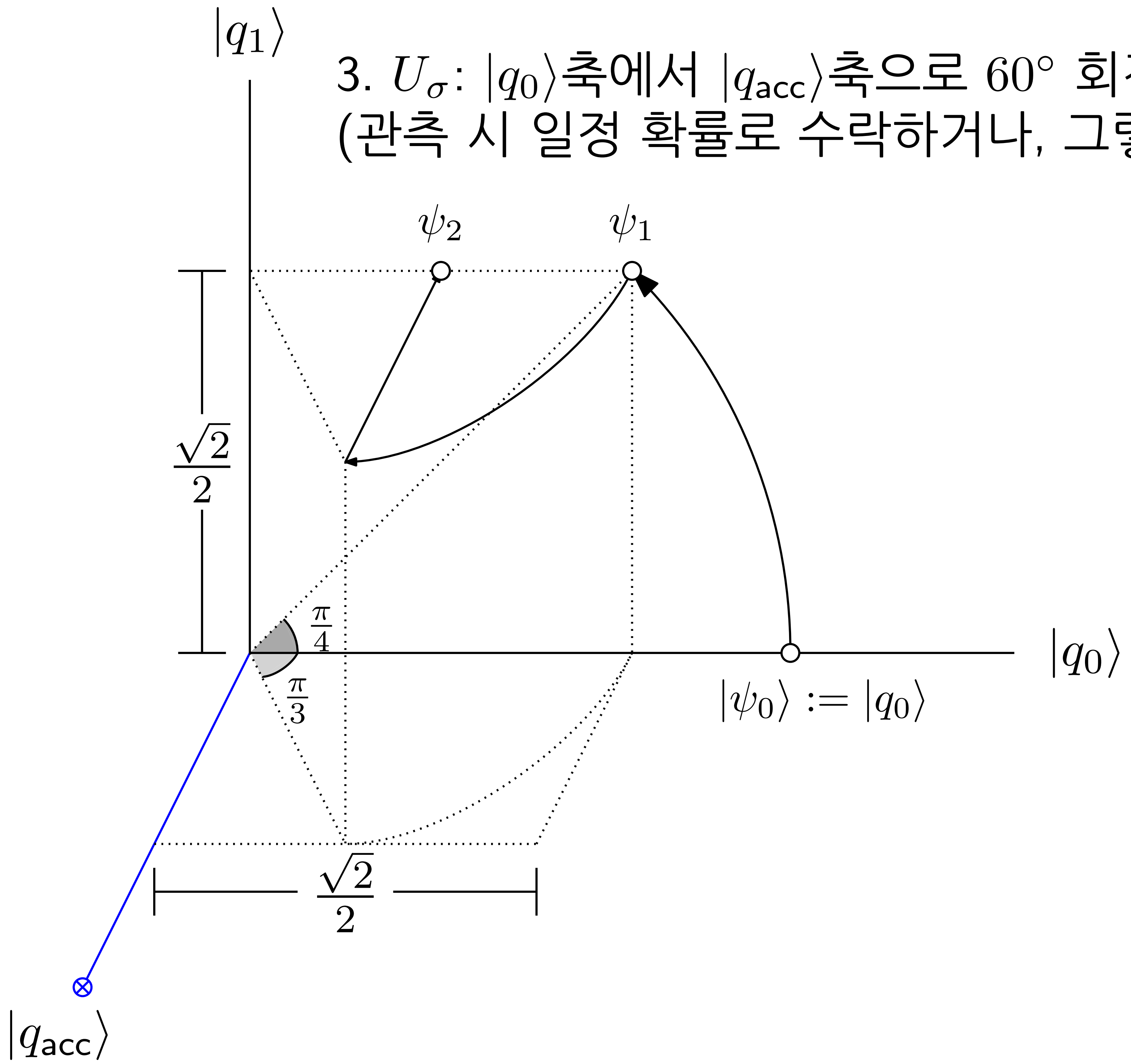
MM-QFA M_k의 동작 과정

2. $U_\#$: $|q_0\rangle$축에서 $|q_1\rangle$축으로 45° 회전한다.
(관측 시 수락 혹은 거절하지 않으므로 계속 진행한다.)



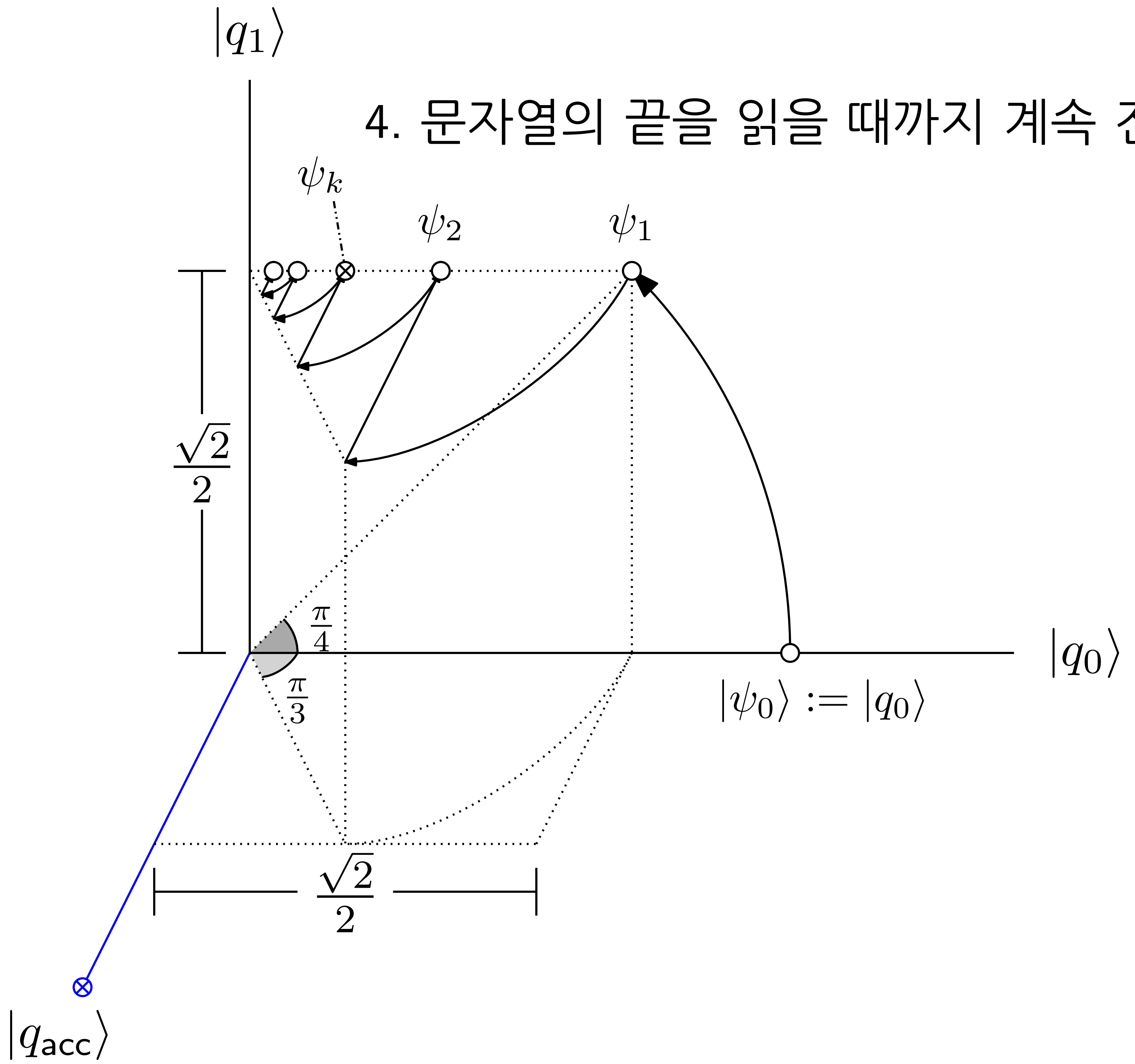
MM-QFA M_k의 동작 과정

3. U_σ: $|q_0\rangle$축에서 $|q_{\mathsf{acc}}\rangle$축으로 60° 회전한다.
(관측 시 일정 확률로 수락하거나, 그렇지 않으면 계속 진행한다.)

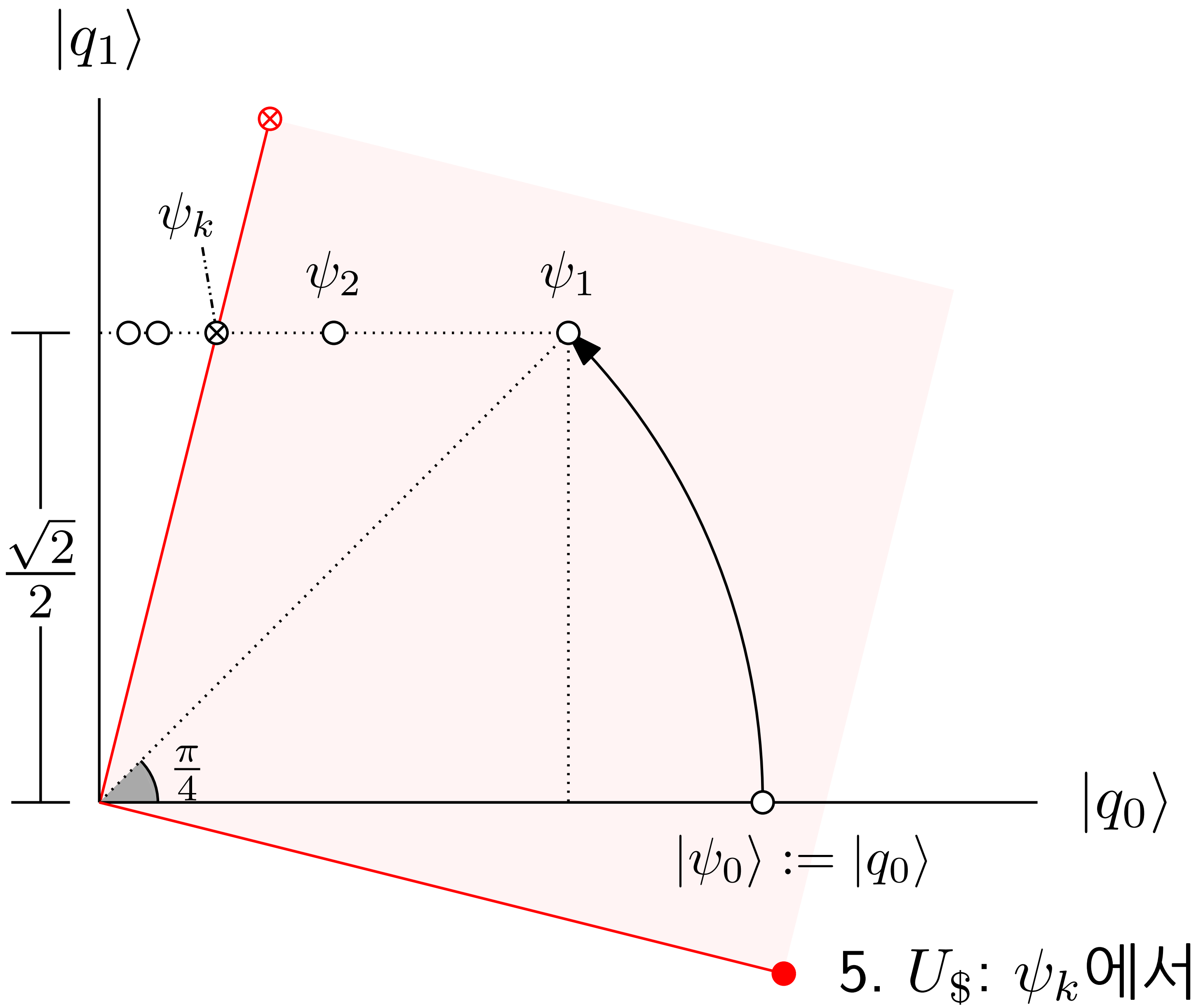


MM-QFA M_k의 동작 과정

4. 문자열의 끝을 읽을 때까지 계속 진행한다.

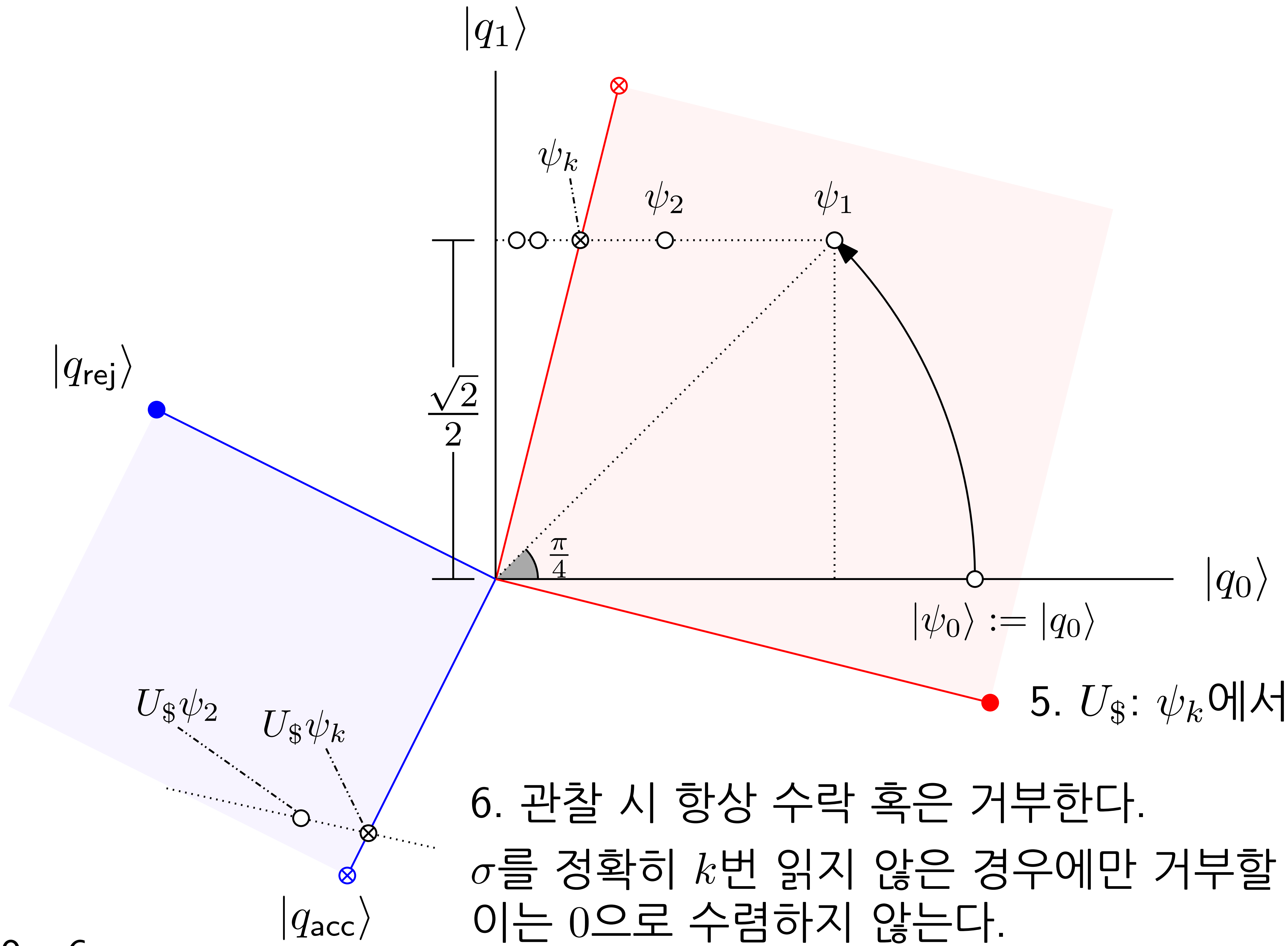


MM-QFA M_k의 동작 과정



5. $U_\$$: ψ_k에서 $|q_{\text{acc}}\rangle$축으로 회전한다.

MM-QFA M_k의 동작 과정



5. $U_\$$: ψ_k에서 $|q_{\text{acc}}\rangle$축으로 회전한다.

6. 관찰 시 항상 수락 혹은 거부한다.

σ를 정확히 k번 읽지 않은 경우에만 거부할 확률이 존재하며, 이는 0으로 수렴하지 않는다.

결론

MM-QFA M_k에 대하여, 다음을 만족하는 $\epsilon > 0$이 존재한다:

1. $w = \sigma^k$일 때, $M(w) = 1$; 이고
2. $w \neq \sigma^k$일 때, $M(w) < 1 - \epsilon$이다.

즉, $L_k = \{\sigma^k\}$는 크기 4의 MM-QFA M_k를 통해 인식할 수 있으며,
이는 DFA/NFA의 경우보다 상태복잡도state complexity 관점에서 효율적이다.

Thank you for your attention!